



MODEL EPIDEMI SIR DAN SVIR PADA PENYAKIT MENULAR

SKRIPSI

**untuk memenuhi persyaratan
dalam menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika**

Oleh

HANNA MUNAIRA

NIM 2011011220013

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMBUNG MANGKURAT
BANJARBARU
2024**

LEMBAR PENGESAHAN

SKRIPSI

MODEL SIR DAN SVIR PADA PENYAKIT MENULAR

Oleh:

Hanna Munaira

NIM 2011011220013

telah dipertahankan di depan Dosen Penguji pada tanggal *17 Januari 2024*

Susunan Dosen Penguji:

Pembimbing I

Yuni Yulida S.Si., M.Sc.

NIP 198110102005012004

Dosen Penguji:

1. Drs. Faisal, M.Si.

2. Hermei Lissa, S.Pd., M.Si.

Pembimbing II

Dr. Muhammad Ahsar K., S.Si., M.Sc.

NIP 198202082005011003

Banjarbaru, *31 Januari 2024*

Program Studi Matematika FMIPA ULM

Koordinator,



Affandi, S.Si., M.Sc.

NIP 197806112005011001

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam Daftar Pustaka.

Banjarbaru, 31 Januari 2024



Hanna Munaira
NIM 2011011220013

ABSTRAK

MODEL EPIDEMI SIR DAN SVIR PADA PENYAKIT MENULAR (Oleh: Hanna Munaira; Pembimbing: Yuni Yulida, Muhammad Ahsar Karim; 2024; 91 halaman)

Penyakit menular merupakan penyakit yang disebabkan oleh mikroorganisme patogen seperti bakteri, virus, parasit, atau jamur. Penyakit ini dapat menyebar, baik secara langsung maupun tidak, dari satu individu ke individu lainnya. Penyebaran penyakit menular dapat dimodelkan dengan pemodelan matematika epidemi Kermack-McKendrick. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan pembentukan model matematika, menentukan titik ekuilibrium dan bilangan reproduksi dasar, serta menganalisis kestabilan lokal pada model matematika. Selain itu, akan dilakukan pula analisis sensitivitas terhadap bilangan reproduksi dasar dan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta orde 4. Dari penelitian ini, diperoleh bentuk model epidemi SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*) dan modifikasi model tersebut menjadi model SVIR (*Susceptible, Vaccinated, Infected, Recovered*). Berdasarkan model yang terbentuk, diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik pada masing-masing model. Bilangan reproduksi dasar masing-masing model ditentukan dengan menggunakan metode *Next Generation Matrix*. Kemudian, dengan menggunakan nilai eigen dari matriks Jacobian, diketahui jenis kestabilan kedua model pada masing-masing titik ekuilibrium adalah stabil asimtotik lokal dengan syarat tertentu. Analisis sensitivitas menunjukkan parameter yang paling sensitif terhadap perubahan bilangan reproduksi dasar jika diurutkan dari yang terbesar untuk model SIR adalah laju penularan, laju kelahiran/kematian, dan laju kesembuhan. Sedangkan, untuk model SVIR adalah laju penularan, laju kelahiran/kematian, laju kesembuhan, dan proporsi populasi yang telah divaksinasi. Analisis- analisis ini kemudian juga diperkuat oleh hasil simulasi numerik.

Kata Kunci: Penyakit Menular, Model Epidemi, Analisis Kestabilan, Analisis Sensitivitas

ABSTRACT

SIR AND SVIR EPIDEMIC MODELS FOR INFECTIOUS DISEASES (By: Hanna Munaira; Supervisor: Yuni Yulida, Muhammad Ahsar Karim; 2024; 91 pages)

Infectious diseases, caused by pathogenic microorganisms like bacteria, viruses, parasites, or fungi, have the potential to spread directly or indirectly between individuals. The spread of infectious diseases can be modeled using the Kermack-McKendrick epidemic model. This research aims to explain the formation of a mathematical model, determine equilibrium points and basic reproduction numbers, and analyze local stability in the mathematical model. Additionally, sensitivity analysis of the basic reproduction numbers and numerical simulations using the fourth-order Runge-Kutta method will be conducted. From this research, the SIR (Susceptible, Infected, Recovered) epidemic model is formulated, and this model is modified to create the SVIR (Susceptible, Vaccinated, Infected, Recovered) model. Based on the formed models, equilibrium points for disease-free and endemic conditions are obtained for each model. The basic reproduction numbers for each model are determined using the Next Generation Matrix method. Subsequently, by using the eigenvalues of the Jacobian matrix, the stability types of both models at each equilibrium point are identified as locally asymptotically stable under certain condition Sensitivity analysis reveals that the most sensitive parameters to changes in the basic reproduction numbers, when ranked from the largest for the SIR model, are the transmission rate, birth/death rate, and recovery rate. Meanwhile, for the SVIR model, they include the transmission rate, birth/death rate, recovery rate, and the proportion of the population vaccinated. These analyses are further supported by numerical simulation results.

Keywords: *Infectious Diseases, Epidemic Model, Stability Analysis, Sensitivity Analysis*

PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah *subhanahu wa ta'ala*, Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat, rahmat, karunia, dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**MODEL SIR DAN SVIR PADA PENYAKIT MENULAR**”. Tidak lupa juga selawat serta salam selalu tercurahkan kepada junjungan besar Nabi Muhammad *sallallahu alaihi wasallam* beserta para keluarga, sahabat, serta pengikut beliau hingga akhir zaman.

Penyusunan skripsi ini bertujuan untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika di Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat. Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, banyak kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam pembahasan materi. Selain itu, proses penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, dukungan, maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Keluarga terutama orang tua, yaitu Bapak Hamdan Rusda (alm.) dan Ibu Rusita, atas dukungan baik secara moral maupun materi yang membuat penulis terus belajar dan menyelesaikan skripsi dengan baik.
2. Bapak Dr. Abdul Gafur, M.Si, M.Sc, Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.
3. Bapak Pardi Affandi, S.Si., M.Sc. selaku Koordinator Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat, sekaligus dosen penasihat akademik penulis yang telah memberikan arahan, motivasi, dan bimbingannya selama perkuliahan.
4. Ibu Yuni Yulida, S.Si., M.Sc. dan Bapak Dr. Muhammad Ahsar Karim, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, bimbingan, masukan, dan motivasi dalam proses penyusunan skripsi ini.
5. Bapak Drs. Faisal, M.Si. dan Ibu Hermei Lissa, S.Pd., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan arahan, kritik, dan saran sehingga skripsi ini menjadi semakin baik.

6. Seluruh dosen pengajar/staf Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat atas ilmu, arahan, dan bantuannya baik selama masa perkuliahan maupun penyusunan skripsi ini.
7. Seluruh teman dan rekan mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat, khususnya angkatan 2020, serta seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu atas bantuan, baik berupa motivasi, masukan, dan saran kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini.

Skripsi ini telah diupayakan agar tersaji dengan baik. Namun, karena keterbatasan kemampuan yang dimiliki oleh penulis, ada kemungkinan masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk dijadikan masukan demi kesempurnaan di masa mendatang. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak, khususnya mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.

Banjarbaru, 31 Januari 2024



Hanna Munaira
NIM 2011011220013

ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

- $S(t)$: Jumlah subpopulasi yang sehat tetapi rentan terinfeksi (*Susceptible*) pada saat t
- $V(t)$: Jumlah subpopulasi yang telah divaksinasi (*Vaccinated*) pada saat t
- $I(t)$: Jumlah subpopulasi yang terinfeksi penyakit (*Infected*) pada saat t
- $R(t)$: Jumlah subpopulasi yang sembuh dari infeksi (*Recovered*) pada saat t
- $N_1(t)$: Jumlah populasi pada saat t model SIR
- $N_2(t)$: Jumlah populasi pada saat t model SVIR
- $\frac{dS}{dt}$: Perubahan jumlah subpopulasi yang sehat tetapi rentan terinfeksi (*Susceptible*) terhadap waktu
- $\frac{dV}{dt}$: Perubahan jumlah subpopulasi yang telah divaksinasi (*Vaccinated*) terhadap waktu
- $\frac{dI}{dt}$: Perubahan jumlah subpopulasi yang terinfeksi (*Infected*) terhadap waktu
- $\frac{dR}{dt}$: Perubahan jumlah subpopulasi yang sembuh dari infeksi (*Recovered*) terhadap waktu
- $s(t)$: Proporsi subpopulasi yang sehat tetapi rentan terinfeksi (*Susceptible*) pada saat t
- $v(t)$: Proporsi subpopulasi yang telah divaksinasi (*Vaccinated*) pada saat t
- $i(t)$: Proporsi subpopulasi yang terinfeksi penyakit (*Infected*) pada saat t
- $r(t)$: Proporsi subpopulasi yang sembuh dari infeksi (*Recovered*) pada saat t
- $n_1(t)$: Proporsi populasi pada saat t model SIR
- $n_2(t)$: Proporsi populasi pada saat t model SVIR
- $\frac{ds}{dt}$: Perubahan proporsi subpopulasi yang sehat tetapi rentan terinfeksi (*Susceptible*) terhadap waktu

- $\frac{dv}{dt}$: Perubahan proporsi subpopulasi yang telah divaksinasi (*Vaccinated*) terhadap waktu
- $\frac{di}{dt}$: Perubahan proporsi subpopulasi yang terinfeksi (*Infected*) terhadap waktu
- $\frac{dr}{dt}$: Perubahan proporsi subpopulasi yang sembuh dari infeksi (*Recovered*) terhadap waktu
- μ : Laju kelahiran/kematian
- γ : Laju kesembuhan
- p : Proporsi populasi yang telah divaksinasi, $p \in (0,1)$
- E^0 : Titik ekuilibrium bebas penyakit
- E^* : Titik ekuilibrium endemik
- \mathcal{R}_0 : Bilangan reproduksi dasar model SIR
- \mathcal{R}_v : Bilangan reproduksi dasar model SVIR
- J : Matriks Jacobian
- K : Matriks *Next Generation*
- λ : Nilai eigen dari persamaan karakteristik
- WHO : *World Health Organization*

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
PERNYATAAN.....	iii
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
PRAKATA.....	vi
ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xiv
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.1 Tujuan Penelitian.....	3
1.2 Sistematika Penulisan.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1 Persamaan Diferensial Biasa	5
2.2 Sistem Persamaan Diferensial	6
2.2.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear	6
2.2.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear	7
2.3 Model Epidemi	8
2.3.1 Model SIR Klasik	8
2.4 Titik Ekuilibrium	9
2.5 Bilangan Reproduksi Dasar	9
2.6 Linearisasi.....	11
2.7 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	12
2.8 Kriteria Routh-Hurwitz	14
2.9 Analisis Kestabilan Lokal.....	14
2.10 Analisis Sensitivitas.....	15

2.11 Metode Runge-Kutta Orde 4	16
2.12 Penyakit Menular.....	16
2.13 Vaksinasi.....	17
BAB III PROSEDUR PENELITIAN.....	18
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	19
4.1 Model Epidemologi SIR.....	19
4.1.1 Pembentukan Model SIR	19
4.1.2 Titik Ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar Model SIR.....	23
4.1.3 Linearisasi	26
4.1.4 Kestabilan Lokal pada Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit (E_1^0)	27
4.1.5 Kestabilan Lokal pada Titik Ekuilibrium Endemik (E_1^*)	28
4.2 Model Epidemologi SVIR.....	30
4.2.1 Pembentukan Model SVIR	30
4.2.2 Titik Ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar Model SVIR....	36
4.2.3 Linearisasi	39
4.2.4 Kestabilan Lokal pada Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit (E_2^0).....	41
4.2.5 Kestabilan Lokal pada Titik Ekuilibrium Endemik (E_2^*)	42
4.3 Analisis Sensitivitas pada Bilangan Reproduksi Dasar Model SIR dan SVIR.....	44
4.3.1 Analisis Sensitivitas pada Bilangan Reproduksi Dasar Model SIR.....	44
4.3.2 Analisis Sensitivitas pada Bilangan Reproduksi Dasar Model SVIR.....	45
4.4 Simulasi Numerik Model SIR dan Model SVIR.....	47
4.4.1 Simulasi Numerik untuk Analisis Sensitivitas pada Model SIR dan SVIR.....	47
4.4.2 Simulasi Numerik untuk Analisis Kestabilan Model SIR dan SVIR	51
4.4.3 Simulasi Numerik untuk Melihat Pengaruh Variasi Parameter terhadap Subpopulasi <i>Infected</i>	63
BAB V PENUTUP.....	66
5.1 Kesimpulan.....	66

5.2	Saran	69
	DAFTAR PUSTAKA	70

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Rumus indeks sensitivitas model SIR	45
Tabel 4.2 Rumus indeks sensitivitas model SVIR	46
Tabel 4.3 Parameter yang digunakan untuk melakukan analisis sensitivitas	47
Tabel 4.4 Nilai indeks sensitivitas terhadap \mathcal{R}_0	47
Tabel 4.5 Parameter yang digunakan untuk melakukan analisis sensitivitas	49
Tabel 4.6 Nilai indeks sensitivitas terhadap \mathcal{R}_v	49
Tabel 4.7 Nilai awal subpopulasi	51
Tabel 4.8 Nilai parameter	51
Tabel 4.9 Hasil simulasi untuk solusi numerik dalam bentuk proporsi pada Persamaan (4.65) di titik ekuilibrium bebas penyakit	52
Tabel 4.10 Nilai awal subpopulasi	54
Tabel 4.11 Nilai parameter	54
Tabel 4.12 Hasil simulasi untuk solusi numerik dalam bentuk proporsi pada Persamaan (4.66) di titik ekuilibrium endemik	55
Tabel 4.13 Nilai awal subpopulasi	57
Tabel 4.14 Nilai parameter	57
Tabel 4.15 Hasil simulasi untuk solusi numerik dalam bentuk proporsi pada Persamaan (4.67) di titik ekuilibrium bebas penyakit	58
Tabel 4.16 Nilai awal subpopulasi	60
Tabel 4.17 Nilai parameter	60
Tabel 4.18 Hasil simulasi untuk solusi numerik dalam bentuk proporsi pada Persamaan (4.68) di titik ekuilibrium endemik	61

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Diagram alir model SIR Kermack-McKendrick.....	8
Gambar 4.1 Diagram alir model epidemi SIR pada penyakit menular.....	20
Gambar 4.2 Diagram alir model epidemi SVIR pada penyakit menular.....	32
Gambar 4.3 Perubahan nilai \mathcal{R}_0 terhadap variasi nilai β	48
Gambar 4.4 Perubahan nilai \mathcal{R}_0 terhadap variasi nilai γ	48
Gambar 4.5 Perubahan nilai \mathcal{R}_v terhadap variasi nilai β	50
Gambar 4.6 Perubahan nilai \mathcal{R}_v terhadap variasi nilai γ	50
Gambar 4.7 Perubahan nilai \mathcal{R}_v terhadap variasi nilai p	50
Gambar 4.8 Hasil simulasi numerik dalam bentuk proporsi model epidemi SIR di E_1^0	53
Gambar 4.9 Hasil simulasi numerik dalam bentuk proporsi model epidemi SIR di E_1^*	56
Gambar 4.10 Hasil simulasi numerik dalam bentuk proporsi model epidemi SVIR di E_2^0	59
Gambar 4.11 Hasil simulasi numerik dalam bentuk proporsi model epidemi SVIR di E_2^*	62
Gambar 4.12 Pengaruh variasi parameter β terhadap subpopulasi <i>Infected</i> pada Model SIR.....	63
Gambar 4.13 Pengaruh variasi parameter β terhadap subpopulasi <i>Infected</i> pada Model SVIR	64
Gambar 4.14 Pengaruh variasi parameter p terhadap subpopulasi <i>Infected</i> pada Model SVIR	65