



**MODEL *SVEIRE* PADA PENYAKIT TUBERKULOSIS DENGAN
VAKSINASI TIDAK SEMPURNA DAN FAKTOR EKSOGEN**

SKRIPSI

**untuk memenuhi persyaratan
dalam menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika**

Oleh:

Ulfa Hariyanti Ningtias

NIM. 1911011220024

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMBUNG MANGKURAT
BANJARBARU
NOVEMBER 2023**



**MODEL *SVEIRE* PADA PENYAKIT TUBERKULOSIS DENGAN
VAKSINASI TIDAK SEMPURNA DAN FAKTOR EKSOGEN**

SKRIPSI

**untuk memenuhi persyaratan
dalam menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika**

Oleh:

Ulfa Hariyanti Ningtias

NIM. 1911011220024

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMBUNG MANGKURAT
BANJARBARU
NOVEMBER 2023**

SKRIPSI

**MODEL SVEIRE PADA PENYAKIT TUBERKULOSIS DENGAN
VAKSINASI TIDAK SEMPURNA DAN FAKTOR EKSOGEN**

Oleh:

ULFA HARIYANTI NINGTIAS

NIM. 1911011220024

telah dipertahankan di depan Dosen Penguji pada tanggal 09 Oktober 2023.

Susunan Dosen Penguji:

Pembimbing I



Yuni Yulida, S.Si, M.Sc.

NIP. 198110102005012004

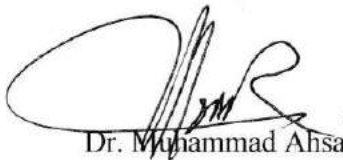
Dosen Penguji:

1. Oni Soesanto, S.Si, M.Si

2. Drs. Faisal, M.Si.



Pembimbing II



Dr. Muhammad Ahsar K., S.Si., M.Sc.

NIP. 198202082005011003

Banjarbaru, 08 November 2023

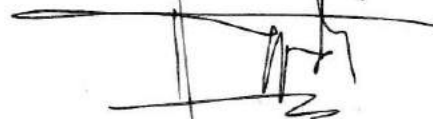
Wakil Dekan Bidang Akademik,



Dr. Gunawan, S.Si., M.Si.

NIP. 197911012005011002

Koordinator Program Studi
Matematika FMIPA ULM,



Pardi Affandi, S.Si., M.Sc.

NIP. 197806112005011001

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam Daftar Pustaka.

Banjarbaru, November 2023



Ulfa Hariyanti Ningtias
NIM. 1911011220024

ABSTRAK

MODEL SVEIRE PADA PENYAKIT TUBERKULOSIS DENGAN VAKSINASI TIDAK SEMPURNA DAN FAKTOR EKSOGEN (Oleh: Ulfa Hariyanti Ningtias; Pembimbing: Yuni Yulida, Muhammad Ahsar Karim, 2023; 83 halaman)

Tuberkulosis merupakan penyakit menular penyebab kematian ke-13 di seluruh dunia yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis*, yang biasanya menyerang paru-paru dan menyebar ketika penderita batuk atau bersin. Penelitian ini menggunakan model *SVEIRE* (*Susceptible, Vaccine, Exposed, Infected, Recovered, Exposed*) dalam mempelajari penyebaran penyakit tuberkulosis dengan vaksinasi tidak sempurna dan faktor eksogen. Vaksinasi tidak sempurna artinya vaksin yang diberikan memungkinkan terjadinya penularan penyakit yang berakibat individu rentan dapat terinfeksi. Individu terinfeksi dapat sembuh dan dapat terpapar kembali hingga terinfeksi ulang (eksogen). Tujuan dari penelitian ini adalah menjelaskan pembentukan model matematika dan menentukan titik ekuilibrium model dan bilangan reproduksi dasar yang akan digunakan pada analisis kestabilan model di titik ekuilibrium bebas penyakit. Penelitian ini menggunakan beberapa metode diantaranya metode *Next Generation Matrix*, linearisasi dan Kriteria Routh-Hurwitz. Hasil dari penelitian ini adalah terbentuknya model *SVEIRE* penyakit tuberkulosis dengan vaksinasi tidak sempurna dan faktor eksogen. Berdasarkan model yang terbentuk, diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Dengan menggunakan metode *Next Generation Matrix* diperoleh Bilangan Reproduksi Dasar, serta dengan menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz diketahui stabil asimtotik lokal di titik ekuilibrium bebas penyakit dengan syarat $R_v < 1$ dan dengan menggunakan teorema Castillo-Chavez diketahui tidak stabil asimtotik global di titik ekuilibrium bebas penyakit. Simulasi numerik untuk model ini disajikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat dengan nilai awal dan parameter yang memenuhi syarat kestabilan di titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik.

Kata Kunci: Tuberkulosis, Model *SVEIRE*, Titik Ekuilibrium, Analisis Kestabilan

ABSTRACT

SVEIRE MODEL OF TUBERCULOSIS DISEASE WITH IMPERFECT VACCINATION AND EXOGENOUS FACTORS (By: Ulfa Hariyanti Ningtias; Supervisors: Yuni Yulida, Muhammad Ahsar Karim, 2023; 83 pages)

Tuberculosis is an infectious disease that causes 13th death worldwide caused by the bacteria *Mycobacterium tuberculosis*, which usually attacks the lungs and spreads when the patient coughs or sneezes. This research uses the *SVEIRE* (*Susceptible, Vaccine, Exposed, Infected, Recovered, Exposed*) model to study the spread of tuberculosis with imperfect vaccination and exogenous factors. Incomplete vaccination means that the vaccine administered allows for the transmission of the disease which results in susceptible individuals becoming infected. Infected individuals can recover and can be re-exposed to be re-infected (exogenous). The purpose of this study is to explain the formation of a mathematical model and determine the equilibrium point of the model and the basic reproduction number that will be used in analyzing the stability of the model at the disease-free equilibrium point. This research uses several methods including the Next Generation Matrix method, linearization and the Routh-Hurwitz Criterion. The result of this research is the formation of *SVEIRE* model of tuberculosis disease with imperfect vaccination and exogenous factors. Based on the model, the disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point are obtained. By using the Next Generation Matrix method, the Basic Reproduction Number is obtained, and by using the Routh-Hurwitz Criterion, it is known to be locally asymptotically stable at the disease-free equilibrium point provided $R_v < 1$ and by using the Castillo-Chavez theorem, it is known to be globally asymptotically unstable at the disease-free equilibrium point. Numerical simulations for this model are presented using the Fourth Order Runge-Kutta method with initial values and parameters that meet the stability conditions at the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point.

Keywords: Tuberculosis, *SVEIRE* Model, Equilibrium Point, Stability Analysis

PRAKATA

Bismillahirramanirrahiim. Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kepada Allah subhanahu wa Ta'ala atas segala limpahan nikmat, rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Model SVEIRE pada Penyakit Tuberkulosis dengan Vaksinasi Tidak Sempurna dan Faktor Eksogen**” sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika di Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad sallallahu alaihi wasallam beserta keluarga, sahabat, serta pengikut beliau hingga yaumul akhir.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari dukungan, bantuan serta bimbingan dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan ucapan terimakasih kepada:

1. Bapak Drs. Abdul Gafur, M.Si., M.Sc., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.
2. Bapak Pardi Affandi, S.Si., M.Sc. selaku Koordinator Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat dan dosen pembimbing akademik yang telah memberikan bimbingan serta motivasi selama perkuliahan.
3. Ibu Yuni Yulida, S.Si., M.Sc. dan Bapak Dr. Muhammad Ahsar Karim, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing yang telah banyak membantu dan selalu sabar dalam membimbing dan mendampingi serta memberikan motivasi kepada penulis hingga terselesaikannya skripsi ini.
4. Bapak Dr. Muhammad Ahsar Karim, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik atas arahan, bimbingan serta motivasi selama masa perkuliahan.
5. Bapak Oni Soesanto, S.Si., M.Si. dan Bapak Drs. Faisal, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan nasehat dan saran dalam penyusunan dan penulisan skripsi ini.
6. Seluruh Dosen pengajar dan Staf Administrasi Program Studi Matematika yang telah memberikan bantuan, bimbingan, kepercayaan, ilmu dan

motivasi yang besar selama masa perkuliahan maupun dalam masa penyusunan skripsi.

7. Orang tua penulis, Bapak Minto dan Ibu Sanikem yang selalu menjadi penyemangat dan selalu memberikan dukungan, kasih sayang, doa, pengertian dan nasehat kepada penulis. Penulis berharap bisa menjadi anak yang dapat dibanggakan baik di dunia maupun di akhirat kelak.
8. Seluruh keluarga besar tersayang yang senantiasa memberikan dukungan dan doa dalam penyelesaian skripsi ini.
9. Seluruh sahabat, teman, dan rekan mahasiswa matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat, khususnya kepada teman-teman angkatan 2019 serta seluruh pihak lainnya yang sangat saya banggakan namun tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah memberikan bantuan, baik berupa saran, semangat maupun nasihat kepada penulis selama proses penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna dan masih banyak kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam pembahasan materi. Penulis menerima kritik dan saran untuk dijadikan masukan dan pembelajaran demi kesempurnaan skripsi ini. Akhir kata, penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak, khususnya mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.

Banjarbaru, November 2023



Ulfa Hariyanti Ningtias
NIM. 1911011220024

ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

- $S(t)$: Jumlah individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi tuberkulosis pada saat t .
- $V(t)$: Jumlah individu yang telah diberikan vaksin pada saat t .
- $E(t)$: Jumlah individu yang terpapar, namun individu tersebut belum dapat menularkan ke individu lainnya pada saat t .
- $I(t)$: Jumlah individu yang terinfeksi tuberkulosis pada saat t .
- $R(t)$: Jumlah individu yang sembuh dari infeksi tuberkulosis pada saat t .
- $N(t)$: Total jumlah populasi individu pada saat t ,
$$N(t) = S(t) + V(t) + E(t) + I(t) + R(t).$$
- $\frac{dS}{dt}$: Laju perubahan individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi tuberkulosis pada saat t .
- $\frac{dV}{dt}$: Laju perubahan individu yang telah diberikan vaksin pada saat t .
- $\frac{dE}{dt}$: Laju Perubahan individu yang terpapar, namun individu tersebut belum dapat menularkan ke individu lainnya pada saat t .
- $\frac{dI}{dt}$: Laju perubahan individu yang terinfeksi tuberkulosis pada saat t .
- $\frac{dR}{dt}$: Laju perubahan individu yang sembuh dari infeksi tuberkulosis pada saat t .
- $\frac{dN}{dt}$: Laju perubahan total populasi individu pada saat t .
- Φ : Daerah Penyelesaian Model
- Λ : Pertambahan individu baru karena kelahiran
- μ : Laju kematian alami.
- θ : Laju perlindungan vaksin yang berkurang.
- ξ : Laju vaksinasi.
- β : Laju penularan.
- ω : Laju resiko terpapar setelah vaksinasi.
- κ : Laju aktivasi virus.

- ζ : Laju kematian akibat penyakit.
- τ : Laju kesembuhan.
- σ : Laju kekebalan tubuh menurun setelah sembuh dari terinfeksi.
- ρ : Laju terinfeksi (eksogen).
- P^0 : Titik ekuilibrium bebas penyakit.
- P^* : Titik ekuilibrium endemik.
- R_0 : Nilai Bilangan Reproduksi Dasar untuk individu yang tidak program vaksinasi.
- R_v : Nilai Bilangan Reproduksi Dasar dengan adanya individu yang program vaksinasi.
- J : Matriks Jacobian.
- G : *Next Generation Matrix*.
- λ : Nilai eigen dari persamaan karakteristik.
- BCG : *Bacille Calmette-Guérin*.
- HIV : *Human Immunodeficiency Virus*.
- WHO : *World Health Organization*

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
PERNYATAAN	iii
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
PRAKATA	vi
ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Tujuan Penelitian	3
1.3 Sistematika Penulisan	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 Persamaan Diferensial.....	6
2.2 Sistem Persamaan Diferensial.....	7
2.3 Pemodelan Matematika.....	10
2.4 Model Epidemi <i>SEIR</i>	10
2.5 Titik Ekuilibrium	11
2.6 Bilangan Reproduksi Dasar	12
2.7 Analisis Kestabilan	14
2.8 Penyakit Tuberkulosis.....	20
2.9 Metode Runge-Kutta Orde Empat	23
BAB III PROSEDUR PENELITIAN	24
3.1 Metode Penelitian	24
3.2 Prosedur Penelitian	24
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	26
4.1 Pembentukan Model Matematika Penyakit Tuberkulosis dengan Vaksin Tidak Sempurna dan Faktor Eksogen dapat Terinfeksi.....	26
4.2 Daerah Penyelesaian Model.....	32
4.3 Titik Ekuilibrium pada Model Matematika <i>SVEIRE</i> Penyakit Tuberkulosis.....	34

4.4	Analisis Kestabilan pada Model Matematika <i>SVEIRE</i> Penyakit Tuberkulosis di Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.....	46
4.5	Efikasi Vaksin Tidak Sempurna pada Penularan Tuberkulosis	58
4.6	Simulasi Numerik pada Model Matematika <i>SVEIRE</i> Penyakit Tuberkulosis.....	60
BAB V PENUTUP		79
5.1	Kesimpulan	79
5.2	Saran	81
DAFTAR PUSTAKA.....		82

DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
4.1 Nilai awal yang digunakan untuk simulasi numerik di titik ekuilibrium bebas penyakit.....	60
4.2 Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi numerik di titik ekuilibrium bebas penyakit.....	61
4.3 Solusi Numerik Persamaan (4.66) di Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit untuk $t \in [0,1000]$	70
4.4 Nilai awal yang digunakan untuk simulasi numerik di titik ekuilibrium endemik.....	72
4.5 Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi numerik di titik ekuilibrium endemik.....	73
4.6 Solusi Numerik Persamaan (4.70) di Titik Ekuilibrium Endemik untuk $t \in [0,500]$	76

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
2.1 Diagram alir model <i>SEIR</i>	11
4.1 Diagram alir Model <i>SVEIRE</i> Tuberkulosis	28
4.2 Simulasi titik ekuilibrium P^0 dengan $S(0) = 50, V(0) = 20, E(0) = 25,$ $I(0) = 15, R(0) = 15$	71
4.3 Simulasi titik ekuilibrium P^* dengan $S(0) = 100, V(0) = 40, E(0) = 50,$ $I(0) = 30, R(0) = 30$	77