



**KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN PENYAKIT FLU SINGAPURA
DENGAN VAKSINASI DAN PERAWATAN**

SKRIPSI

**untuk memenuhi persyaratan
dalam menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika**

Oleh:

MITTAHUL UBUDIAH

NIM. 1911011220014

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMBUNG MANGKURAT
BANJARBARU
MEI 2023**

SKRIPSI

KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN PENYAKIT FLU SINGAPURA DENGAN VAKSINASI DAN PERAWATAN

Oleh:
MITTAHUL UBUDIAH
NIM 1911011220014

telah dipertahankan di depan Dosen Penguji pada tanggal 29 Maret 2023.
Susunan Dosen Penguji:

Pembimbing I



Pardi Affandi, S.Si., M.Sc.
NIP. 197806112005011001

Dosen Penguji:

1. Akhmad Yusuf, S.Si. M.Kom.
2. Yuni Yulida, S.Si., M.Si.

()
()

Pembimbing II



Oni Soesanto, S.Si., M.Si.
NIP. 197301262005011003

Banjarbaru, April 2023



Wakil Dekan Bidang Akademik,

Dr. Gunawan, S.Si., M.Si.
NIP. 197911012005011002

Koordinator Program Studi
Matematika FMIPA ULM,



Pardi Affandi, S.Si., M.Sc.
NIP. 197806112005011001

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam Daftar Pustaka.

Banjarbaru, Mei 2023



Mittahul Ubudiah

NIM. 1911011220014

ABSTRAK

KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN PENYAKIT FLU SINGAPURA DENGAN VAKSINASI DAN PERAWATAN (Oleh: Mittahul Ubudiah; Pembimbing: Pardi Affandi, Oni Soesanto, 2022; 66 halaman)

Flu Singapura dikenal dengan *Hand, Foot and Mouth Disease* merupakan penyakit menular akut yang disebabkan oleh kelompok virus yang disebut *enterovirus*, diantaranya *Coxsackievirus A type 16 (CV A16)* dan *Enterovirus 71 (EV-71)*. Penyakit ini yang seringkali menyerang anak-anak usia dibawah 10 tahun. Flu Singapura ini memerlukan perhatian di negara tropis seperti Indonesia, karena wabah penyakit ini dapat bersifat endemik atau sporadis. Penyebaran Flu Singapura dapat dipelajari dengan menerapkan teori kontrol optimal dengan beberapa variabel kontrol yang tepat untuk mengendalikan penyebaran penyakit tersebut. Tujuan dari penelitian ini adalah menjelaskan terbentuknya model matematika untuk penyebaran penyakit Flu Singapura, menganalisis kestabilan model, mengaplikasikan kontrol optimal serta membuat simulasi numerik dan interpretasi. Penelitian ini dilakukan dengan cara mengumpulkan referensi pendukung yang berkaitan dengan persamaan diferensial, analisis kestabilan dan teori kontrol optimal. Pada penelitian ini kestabilan lokal pada model di titik ekuilibrium diperoleh melalui linearisasi menggunakan matriks Jacobian kemudian akar-akar polinomialnya diperoleh dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz dan penyelesaian kontrol optimal menggunakan prinsip maksimum Pontryagin serta simulasi model tanpa dan dengan kontrol menggunakan metode Runge Kutta orde empat. Hasil penelitian yang diperoleh yaitu terbentuknya model penyebaran penyakit Flu Singapura, berdasarkan model tersebut diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Selanjutnya, diperoleh bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) dan analisis kestabilan model di titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal dengan syarat ($\mathcal{R}_0 < 1$) sedangkan di titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal dengan syarat ($\mathcal{R}_0 > 1$). Kemudian diperoleh fungsi kontrol yang optimal berupa kontrol vaksinasi dan perawatan. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa pemberian kontrol vaksinasi dan perawatan dapat meminimalkan subpopulasi terpapar dan terinfeksi Flu Singapura serta memaksimalkan subpopulasi yang sembuh.

Kata kunci: Flu Singapura, Model SEIVT, Analisis Kestabilan, Kontrol Optimal.

ABSTRACT

OPTIMAL CONTROL OF THE SPREAD OF SINGAPORE FLU WITH VACCINATION AND TREATMENT (By: Mittahul Ubudiah; Advisors: Pardi Affandi, Oni Soesanto, 2022; 77 pages)

Singapore Flu, known as Hand, Foot and Mouth Disease, is an acute infectious disease caused by a group of viruses called enteroviruses, including Coxsackievirus A type 16 (CV A16) and Enterovirus 71 (EV-71). This disease often attacks children under the age of 10 years. Singapore Flu requires attention in tropical countries like Indonesia, because outbreaks of this disease can be endemic or sporadic. The spread of Singapore Flu can be studied by applying optimal control theory with several appropriate control variables to control the spread of the disease. The purpose of this study was to explain the formation of a mathematical model for the spread of Singapore Flu, analyze the stability of the model, apply optimal control and make numerical simulations and interpretations. This research was conducted by gathering supporting references related to differential equations, stability analysis and optimal control theory. In this study the local stability of the model at the equilibrium point was obtained through linearization using the Jacobian matrix then the polynomial roots were obtained using the Routh-Hurwitz criteria and the optimal control solution using the Pontryagin maximum principle as well as model simulation without and with control using the fourth order Runge Kutta method. The research results obtained were the formation of a model of the spread of Singapore Flu, based on this model two equilibrium points were obtained, namely the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. Furthermore, the basic reproduction number (\mathcal{R}_0) was obtained and the stability analysis of the model at the disease-free equilibrium point was locally asymptotically stable with the condition ($\mathcal{R}_0 < 1$) while at the endemic equilibrium point it was locally asymptotically stable with the condition ($\mathcal{R}_0 > 1$). Then the optimal control function was obtained in the form of vaccination and treatment control. The results of numerical simulations show that administration of vaccination control and treatment can minimize the subpopulation exposed to and infected with Singapore Flu and maximize the subpopulation that recovers.

Keywords: Singapore Flu, SEIVT Model, Stability Analysis, Optimal Control.

PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah subhanahu wa ta'ala atas berkat, rahmat dan karunia serta izin-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Kontrol Optimal Penyebaran Penyakit Flu Singapura dengan Vaksinasi dan Perawatan”. Shalawat serta salam tidak lupa tercurahkan kepada junjungan besar Nabi Muhammad sallallahu alaihi wasallam beserta para keluarga, sahabat, serta pengikut beliau hingga akhir zaman. Penyusunan skripsi ini bertujuan untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam rangka menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika di Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa adanya dukungan, bantuan, kerja sama maupun bimbingan dari berbagai pihak selama penyusunan skripsi ini. Pada kesempatan ini juga penulis ingin mengucapkan terimakasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak Drs. Abdul Gafur, M.Si., M.Sc., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat Banjarbaru.
2. Bapak Pardi Affandi, S.Si., M.Sc. selaku Koordinator Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat Banjarbaru dan selaku pembimbing yang telah membimbing dari awal hingga akhir penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Oni Soesanto, S.Si., M.Si. selaku pembimbing yang telah sabar membimbing dan mendampingi dari awal hingga akhir penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Akhmad Yusuf, S.Si., M.Kom. selaku dosen penguji dan pembimbing akademik yang telah memberikan bimbingan dan motivasi selama perkuliahan.
5. Ibu Yuni Yulida, S.Si., M.Sc. selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan untuk perbaikan dalam penyusunan skripsi ini.
6. Dosen-dosen pengajar program studi matematika atas bimbingan dan motivasi dalam perkuliahan.

7. Kedua orang tua penulis, Bapak Muhammad Syamsul dan Ibu Masitah yang terhebat sejagad raya, yang telah berjuang agar penulis bisa kuliah, selalu memberikan kasih sayang, doa, nasihat, dukungan, motivasi serta atas kesabarannya yang luar biasa dalam setiap langkah hidup penulis.
8. Kakak penulis tercinta, Muhammad Fajrin Noor yang selalu menemani serta memberikan dukungan dan bantuan kepada penulis.
9. Teman-teman Sahabat Bumi yakni Taufik, Briantina, Kuratul, Napisah, Noveta, dan Zuraida yang telah menjadi teman terbaik, memberikan rasa kekeluargaan, waktu, dan kebaikan tak terhingga dari awal perkuliahan hingga saat ini.
10. Syahdaty Ghina Tsabitna atas persahabatan yang suportif, tempat penulis berkeluh-kesah, semangat yang luar biasa dan waktu yang diberikan di tengah kesibukan masing-masing dalam menggapai gelar sarjana.
11. Rekan-rekan mahasiswa Matematika FMIPA ULM, khususnya angkatan 2019 yang telah memberikan bantuan, baik berupa masukan, saran, semangat maupun nasihat kepada penulis selama proses penulisan skripsi ini.
12. Seluruh keluarga, sahabat, teman, dan pihak-pihak lain yang rasanya tidak mungkin penulis sebutkan satu per satu.
13. Diri saya sendiri yang telah berjuang dalam proses penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna masih terdapat kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam pembahasan materi. Penulis mengharapkan kritik dan saran untuk dijadikan masukan demi penyempurnaan skripsi ini. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak dan khususnya mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat Banjarbaru. Aamiin.

Banjarbaru, Mei 2023



Mittahul Ubudiah

NIM. 1911011220014

ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

Simbol	Arti
$S(t)$: Jumlah subpopulasi yang sehat tetapi rentan terinfeksi Flu Singapura (<i>Susceptible</i>) pada saat t
$E(t)$: Jumlah subpopulasi terpapar Flu Singapura (<i>Exposed</i>) pada saat t
$I(t)$: Jumlah subpopulasi individu terinfeksi Flu Singapura (<i>Infected</i>) pada saat t
$V(t)$: Jumlah subpopulasi individu yang sudah divaksinasi (<i>Vaccinated</i>) pada saat t
$R(t)$: Jumlah subpopulasi individu yang sembuh setelah diberi perawatan (<i>Recovered</i>) pada saat t
$\frac{dS}{dt}$: Perubahan jumlah subpopulasi yang sehat tetapi rentan terinfeksi Flu Singapura (<i>Susceptible</i>) terhadap waktu
$\frac{dE}{dt}$: Perubahan jumlah subpopulasi terpapar Flu Singapura (<i>Exposed</i>) terhadap waktu
$\frac{dI}{dt}$: Perubahan jumlah subpopulasi terinfeksi Flu Singapura (<i>Infected</i>) terhadap waktu
$\frac{dV}{dt}$: Perubahan jumlah subpopulasi individu yang sudah divaksinasi (<i>Vaccinated</i>) terhadap waktu
$\frac{dR}{dt}$: Perubahan jumlah subpopulasi yang sembuh setelah diberi perawatan (<i>Recovered</i>) terhadap waktu
b	: Laju kelahiran
p	: Laju vaksinasi
β	: Laju infeksi
μ	: Laju kematian alami
α	: Laju individu yang terpapar penyakit Flu Singapura menjadi terinfeksi
d	: Laju kematian akibat penyakit Flu Singapura
γ	: Laju perawatan dari individu yang terinfeksi

ω	: Laju perpindahan populasi
η_1	: Laju hilangnya kekebalan dari individu tervaksinasi
η_2	: Laju hilangnya kekebalan dari individu sembuh
E_0	: Titik kesetimbangan bebas penyakit
E^*	: Titik kesetimbangan endemik
J	: Matriks Jacobian
λ	: Nilai eigen
\mathcal{R}_0	: Bilangan Reproduksi Dasar
\mathcal{R}	: Matriks Next Generation
U	: Himpunan kontrol
J	: <i>Performance index</i> (fungsi tujuan)
t_f	: Waktu akhir mewakili lamanya program pengobatan
u_1	: Kontrol vaksinasi
u_2	: Kontrol perawatan
u_1^*	: Kontrol vaksinasi yang optimal
u_2^*	: Kontrol perawatan yang optimal
A_1	: Koefisien bobot dari individu terpapar
A_2	: Koefisien bobot dari individu terinfeksi
B_1	: Koefisien bobot biaya yang dikenakan pada kontrol vaksinasi
B_2	: Koefisien bobot biaya yang dikenakan pada kontrol perawatan
H	: Fungsi Hamiltonian

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
PERNYATAAN	iii
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
PRAKATA	ii
ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xiii
DARTAR LAMPIRAN	iii
BAB I PENDAHULUAN	Error! Bookmark not defined.
1.1 Latar Belakang	Error! Bookmark not defined.
1.2 Tujuan Penulisan	3
1.3 Sistematika Penulisan	Error! Bookmark not defined.
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	Error! Bookmark not defined.
2.1 Persamaan Diferensial	Error! Bookmark not defined.
2.2 Sistem Persamaan Diferensial	Error! Bookmark not defined.
2.2.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear	Error! Bookmark not defined.
2.2.2 Sistem Persamaan Diferensial Non-Linear	Error! Bookmark not defined.
2.3 Titik Keseimbangan	Error! Bookmark not defined.
2.4 Analisis Kestabilan	Error! Bookmark not defined.
2.4.1 Linearisasi	Error! Bookmark not defined.
2.4.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	Error! Bookmark not defined.
2.4.3 Bilangan Reproduksi Dasar	Error! Bookmark not defined.
2.4.4 Kriteria Routh-Hurwitz	Error! Bookmark not defined.
2.5 Kontrol Optimal	Error! Bookmark not defined.
2.5.1 Metode Lagrange	16

2.5.2	Fungsi Hamiltonian.....	16
2.5.3	Prinsip Maksimum Pontryagin.....	17
2.6	Metode Runge-Kutta Orde 4.....	Error! Bookmark not defined.
2.7	Penyakit Flu Singapura.....	Error! Bookmark not defined.
2.8	Vaksin EV71	Error! Bookmark not defined.
2.9	Perawatan.....	Error! Bookmark not defined.
BAB III PROSEDUR PENELITIAN.....		Error! Bookmark not defined.
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN		Error! Bookmark not defined.
4.1	Pembentukan Model Penyebaran Penyakit Flu Singapura	Error! Bookmark not defined.
4.2	Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Flu Singapura.....	Error! Bookmark not defined.
4.2.1	Titik Keseimbangan Bebas Penyakit (E_0).....	Error! Bookmark not defined.
4.2.2	Bilangan Reproduksi Dasar (\mathcal{R}_0)	Error! Bookmark not defined.
4.2.3	Titik Keseimbangan Endemik (E^*).....	Error! Bookmark not defined.
4.2.4	Kestabilan Titik Keseimbangan	Error! Bookmark not defined.
4.3	Pembentukan Model Penyebaran Penyakit Flu Singapura dengan Kontrol	59
4.4	Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal.....	Error! Bookmark not defined.
4.4.1	Persamaan <i>State</i>	62
4.4.2	Persamaan <i>Costate</i>	63
4.4.3	Kondisi Stationer.....	64
4.5	Simulasi Numerik	67
BAB V PENUTUP		74
5.1	Kesimpulan	74
5.2	Saran	74
DAFTAR PUSTAKA		76
LAMPIRAN		

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
4.1 Diagram alir model penyebaran penyakit Flu Singapura.....	25
4.2 Dinamika Subpopulasi Rentan.....	68
4.3 Dinamika Subpopulasi Terpapar.....	69
4.4 Dinamika Subpopulasi Terinfeksi.....	70
4.5 Dinamika Subpopulasi Tervaksinasi.....	71
4.6 Dinamika Subpopulasi Sembuh.....	71
4.7 Simulasi Kontrol u_1 dan u_2	72

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran

1. Tabel Hasil Simulasi Numerik Perbandingan Jumlah Individu dari Subpopulasi Rentan Sebelum dan Sesudah Kontrol Optimal
2. Tabel Hasil Simulasi Numerik Perbandingan Jumlah Individu dari Subpopulasi Terpapar Sebelum dan Sesudah Kontrol Optimal
3. Tabel Hasil Simulasi Numerik Perbandingan Jumlah Individu dari Subpopulasi Terinfeksi Sebelum dan Sesudah Kontrol Optimal
4. Tabel Hasil Simulasi Numerik Perbandingan Jumlah Individu dari Subpopulasi Tervaksinasi Sebelum dan Sesudah Kontrol Optimal
5. Tabel Hasil Simulasi Numerik Perbandingan Jumlah Individu dari Subpopulasi Sembuh Sebelum dan Sesudah Kontrol Optimal