



**PENERAPAN KONTROL OPTIMAL PADA MODEL SVIR**

**SKRIPSI**

**untuk memenuhi persyaratan dalam  
menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika**

**Oleh:**

**MELDELINNA KHOIROTUN NISA  
NIM. 1811011320012**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMBUNG MANGKURAT  
BANJARBARU**

**2023**

**SKRIPSI**

**PENERAPAN KONTROL OPTIMAL PADA MODEL SVIR**

Oleh:

**Meldelinna Khoirotun Nisa**

**NIM. 1811011320012**

telah dipertahankan di depan Dosen Penguji pada tanggal 14 Juni 2023.

Susunan Dosen Penguji:

**Pembimbing I**



**Pardi Affandi, S.Si., M.Sc.**

**NIP. 197806112005011001**

Dosen Penguji:

1. **Drs. Faisal, M.Si.**

2. **Aprida Siska Lestia, S.Si., M.Si.**



**Pembimbing II**



**Oni Soesanto, S.Si., M.Si.**

**NIP. 197301262005011003**

**Banjarbaru, 27 Juni 2023**

**Wakil Dekan Bidang Akademik,**



**Pardi Affandi, S.Si., M.Si.**

**NIP. 197806112005011002**

**Koordinator Program Studi**

**Matematika FMIPA ULM,**



**Pardi Affandi, S.Si., M.Sc.**

**NIP. 197806112005011001**

## **PERNYATAAN**

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam Daftar Pustaka.

Banjarbaru, 27 Juni 2023



Meldelina Khoirotun Nisa  
NIM. 1811011320012

## ABSTRAK

**PENERAPAN KONTROL OPTIMAL PADA MODEL SVIR** (Oleh: Meldelinna Khoirotun Nisa; Pembimbing: Pardi Affandi, Oni Soesanto, 2023; 31 halaman)

Penyakit menular merupakan penyakit infeksi yang dapat mempengaruhi kesehatan manusia. Menularnya suatu penyakit disebabkan karena terjadinya kontak antara individu rentan dengan individu terinfeksi sehingga menimbulkan wabah penyakit pada suatu populasi. Dinamika penyebaran penyakit dapat direpresentasikan dengan model matematika. Model matematika yang digunakan untuk penyebaran penyakit ini terdiri dari empat kompartemen yaitu kompartemen rentan terhadap penyakit (S), kompartemen terinfeksi (I), kompartemen sembuh (R), dan kompartemen terinfeksi (I). Tujuan dari penelitian ini adalah menjelaskan terbentuknya model SVIR, menentukan bentuk solusi optimal model SVIR dan melakukan simulasi numerik. Pada model yang terbentuk diberikan tiga variabel kontrol yaitu mobilisasi sosial, skrining dan sanitasi. Kontrol optimal diperoleh dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin serta simulasi model menggunakan metode *forward-backward* Runge Kutta orde empat. Hasil dari penelitian ini adalah terbentuknya model SVIR dan diperoleh bentuk solusi yang optimal untuk model SVIR dengan tiga variabel kontrol yaitu mobilisasi sosial, skrining dan sanitasi. Berdasarkan hasil simulasi numerik, ketika menerapkan tiga kontrol tersebut jumlah individu yang terinfeksi berkurang dan jumlah populasi yang sembuh bertambah.

**Kata kunci:** Model SVIR, Kontrol Optimal, Prinsip Maksimum Pontryagin

## **ABSTRACT**

### **IMPLEMENTATION OF OPTIMAL CONTROLS IN THE SVIR MODEL**

(By: Meldelinna Khoirotun Nisa; Advisors: Pardi Affandi, Oni Soesanto, 2023; 31 pages)

Communicable disease is an infectious disease that can affect human health. Transmission of a disease is caused by contact between susceptible individuals and infected individuals, causing an outbreak of disease in a population. The dynamics of disease spread can be represented by a mathematical model. The mathematical model used for the spread of this disease consisted of four compartments, namely the susceptible compartment (S), the vaccinated compartment (V), the infected compartment (I), and the recovered compartment (R). The purpose of this study was to explain the formation of the SVIR model, determine the optimal form of the SVIR model solution, and perform numerical simulations. In the model formed, three control variables were given, namely social mobilization, screening, and sanitation. Optimal control was obtained using Pontryagin's maximum principle and a simulation model using the fourth order forward-backward Runge Kutta method. The results of this study were the formation of the SVIR model and the optimal solution form for the SVIR model with three control variables, namely social mobilization, screening, and sanitation. Based on the result of numerical simulation, when applying the three controls, the number of infected individuals decreased and the number of recovered populations increased.

**Keywords:** SVIR Model, Optimal Control, Pontryagin Maximum Principle

## PRAKATA

Alhamdulillah rabbil'alamin, puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan begitu banyak nikmat, karunia, hidayah dan inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul **“PENERAPAN KONTROL OPTIMAL PADA MODEL SVIR”**. Sholawat serta salam tak lupa turunkan kepada junjungan dan suri tauladan kita, Nabi Muhammad SAW, beserta keluarga, sahabat, serta pengikut setia beliau hingga akhir zaman. Penyusunan skripsi ini bertujuan untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam rangka menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika di Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.

Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua dan keluarga yang telah memberikan dukungan baik secara moril maupun materil serta do'a yang tiada henti-hentinya.
2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat Banjarbaru.
3. Koordinator Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat Banjarbaru.
4. Bapak Mohammad Mahfuzh Shiddiq, S.Si., M.Si dan Ibu Yuni Yulida, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan nasihat selama perkuliahan.
5. Bapak Pardi Affandi, S.Si., M.Sc. dan Bapak Oni Soesanto, S.Si., M.Si. selaku pembimbing tugas akhir yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis hingga akhirnya skripsi ini dapat terselesaikan.
6. Bapak Drs. Faisal, M.Si dan Ibu Aprida Siska Lestia, S.Si., M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan koreksi sehingga penulisan skripsi ini dapat menjadi lebih baik.

7. Dosen-dosen di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat terutama dosen-dosen di Program Studi Matematika yang telah membekali penulis dengan ilmu yang bermanfaat selama perkuliahan.
8. Kerabat dekat yaitu Teman Hijrah (Maya, Hismi, Fitri dan Fipah) serta tim SOLID (Uwel, Pilah, Matus, Rafie, Yasir, Afrian dan Ardi) yang selalu memberikan motivasi dan dukungannya kepada penulis selama perkuliahan sampai proses penulisan skripsi ini selesai.
9. Rekan-rekan mahasiswa Matematika FMIPA ULM dan pihak-pihak lain yang rasanya tidak mungkin penulis sebutkan satu per satu.
10. Diri saya sendiri yang telah berjuang dalam proses penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna masih terdapat kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam pembahasan materi. Penulis mengharapkan kritik dan saran untuk dijadikan masukan demi penyempurnaan skripsi ini. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak dan khususnya mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat Banjarbaru. Aamiin.

Banjarbaru, 27 Juni 2023



Meldelina Khoirotun Nisa  
NIM. 1811011320012

## ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

$S(t)$  : Jumlah individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi penyakit menular pada saat  $t$

$V(t)$  : Jumlah individu yang telah di vaksin pada saat  $t$

$I(t)$  : Jumlah individu yang terinfeksi penyakit menular pada saat  $t$

$R(t)$  : Jumlah individu yang sembuh dari infeksi penyakit menular pada saat  $t$

$\frac{dS}{dt}$  : Perubahan jumlah populasi *Susceptible* terhadap waktu

$\frac{dV}{dt}$  : Perubahan jumlah populasi *Vaccinated* terhadap waktu

$\frac{dI}{dt}$  : Perubahan jumlah populasi *Infected* terhadap waktu

$\frac{dR}{dt}$  : Perubahan jumlah populasi *Recovered* terhadap waktu

$A$  : Tingkat kelahiran individu baru

$\mu$  : Tingkat kematian alami

$\rho$  : Tingkat individu rentan yang diberikan vaksin

$\tau$  : Tingkat transmisi (kontak langsung) antara individu yang terinfeksi terhadap individu rentan

$\delta_1$  : Tingkat individu yang sembuh kehilangan kekebalan

$\delta_2$  : Tingkat individu yang telah di vaksin dapat menjadi rentan kembali

$\gamma$  : Tingkat kesembuhan yang terinfeksi

$r$  : Fungsi treatment

$\alpha$  : Tingkat kematian karena penyakit

$J$  : *Performance Index* (fungsi tujuan)

$u_1$  : Kontrol mobilisasi sosial



- $u_2$  : Kontrol skrining
- $u_3$  : Kontrol sanitasi
- $u_1^*$  : Kontrol mobilisasi sosial yang optimal
- $u_2^*$  : Kontrol skrining yang optimal
- $u_3^*$  : Kontrol sanitasi yang optimal
- $Z_1$  : Koefisien bobot dari individu terinfeksi
- $Z_2$  : Koefisien bobot biaya yang dikenakan pada kontrol mobilisasi sosial
- $Z_3$  : Koefisien bobot biaya yang dikenakan pada kontrol skrining
- $Z_4$  : Koefisien bobot biaya yang dikenakan pada kontrol sanitasi
- $\mathcal{H}$  : Fungsi Hamiltonian
- min : Nilai minimum

## DAFTAR ISI

	<b>Halaman</b>
<b>HALAMAN JUDUL</b>	<b>i</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	<b>ii</b>
<b>PERNYATAAN</b>	<b>iii</b>
<b>ABSTRAK</b>	<b>vi</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>v</b>
<b>PRAKATA</b>	<b>vi</b>
<b>ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN</b>	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xii</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xiii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Tujuan Penelitian.....	2
1.3 Sistematika Penulisan.....	2
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	<b>4</b>
2.1 Persamaan Diferensial.....	4
2.2 Sistem Persamaan Diferensial Linier.....	5
2.2.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier.....	5
2.2.2 Sistem Persamaan Diferensial Non linier.....	6
2.3 Metode Lagrange.....	7
2.4 Fungsi Hamiltonian.....	7
2.5 Kontrol Optimal.....	8
2.6 Prinsip Maksimum Pontryagin.....	8
2.7 Model SIR Klasik.....	9
2.8 Strategi Kontrol.....	11
2.8.1 Mobilisasi Sosial.....	11
2.8.2 Skrining.....	11
2.8.3 Sanitasi.....	12

2.9 Metode <i>Forward-Backward</i> Runge Kutta Orde Empat Optimal.....	12
<b>BAB III PROSEDUR PENELITIAN</b>	<b>14</b>
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	<b>15</b>
4.1 Pembentukan Model SVIR .....	15
4.2 Model SVIR dengan kontrol .....	19
4.3 Simulasi Numerik .....	25
<b>BAB V PENUTUP</b>	<b>28</b>
5.1 Kesimpulan .....	28
5.2 Saran.....	29
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>30</b>

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b> Diagram kompartemen model SIR klasik .....	10
<b>Gambar 4.1</b> Diagram kompartemen model SVIR .....	16
<b>Gambar 4.2</b> Hasil simulasi model SVIR tanpa kontrol .....	26
<b>Gambar 4.3</b> Hasil simulasi model SVIR dengan kontrol .....	26

## DAFTAR TABEL

<b>Gambar 4.1</b> Parameter Model SVIR dan Nilainya .....	25
<b>Gambar 4.2</b> Nilai Awal untuk simulasi kontrol optimal .....	25