



**MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT MENULAR  
DENGAN TRANSMISI VERTIKAL DAN TINGKAT KEJADIAN JENUH**

**SKRIPSI**

**untuk memenuhi persyaratan  
dalam menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika**

**Oleh:**

**ANA RIZKI MAHMUDAH**

**NIM. 1911011220023**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMBUNG MANGKURAT**

**BANJARBARU**

**November 2023**

# SKRIPSI

## MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT MENULAR DENGAN TRANSMISI VERTIKAL DAN TINGKAT KEJADIAN JENUH

Oleh:

Ana Rizki Mahmudah

NIM. 1911011220023

telah dipertahankan di depan Dosen Penguji pada tanggal 24 Oktober 2023.  
Susunan Dosen Penguji:

### Pembimbing I



Dr. Muhammad Ahsar K., S.Si., M.Sc.  
NIP. 198202082005011003

### Dosen Penguji:

1. Pardi Affandi, S.Si., M.Sc.

2. Aprida Siska Lestia, S.Si., M.Si.



### Pembimbing II



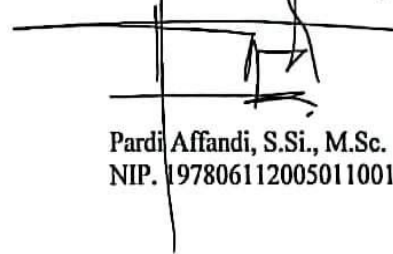
Yuni Yulida, S.Si., M.Sc.  
NIP. 198110102005012004

Banjarbaru, 13 November 2023

Wakil Dekan Bidang Akademik,



Koordinator Program Studi  
Matematika FMIPA ULM,



Pardi Affandi, S.Si., M.Sc.  
NIP. 197806112005011001

## **PERNYATAAN**

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam Daftar Pustaka.

Banjarbaru, 13 November 2023



Ana Rizki Mahmudah

NIM. 1911011220023

## ABSTRAK

**MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT MENULAR DENGAN TRANSMISI VERTIKAL DAN TINGKAT KEJADIAN JENUH**  
(Oleh: Ana Rizki Mahmudah; Pembimbing: Muhammad Ahsar Karim, Yuni Yulida; 2023; 75 halaman)

Penyebaran penyakit menular dapat melalui dua cara, yaitu penularan secara horizontal dan vertikal. Penularan secara horizontal merupakan penularan penyakit melalui kontak fisik langsung atau tidak langsung dengan agen infeksi, sedangkan penularan secara vertikal merupakan penularan langsung dari ibu yang terinfeksi kepada janin atau bayi yang baru lahir. Salah satu fitur penting dalam model penularan penyakit adalah tingkat kejadian jenuh, yang didefinisikan sebagai efek dari tindakan yang dilakukan terhadap individu yang rentan dan terinfeksi yang dapat mengurangi laju penularan penyakit. Tujuan penelitian ini adalah untuk menjelaskan pembentukan model matematika penyebaran penyakit menular dengan transmisi vertikal dan tingkat kejadian jenuh, menentukan titik ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar, menganalisa kestabilan lokal dan global di titik ekuilibrium pada model, menganalisa sensitivitas dari Bilangan Reproduksi Dasar dan melakukan simulasi numerik. Adapun metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Next Generation Matrix*, linearisasi, fungsi Lyapunov dan metode Runge-Kutta orde empat. Hasil penelitian ini adalah terbentuknya model matematika penyebaran penyakit menular dengan transmisi vertikal dan tingkat kejadian jenuh. Berdasarkan model tersebut diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik, kemudian diperoleh Bilangan Reproduksi Dasar. Selanjutnya, hasil analisa kestabilan lokal dan global di titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik dengan syarat-syarat tertentu. Selain itu, hasil analisa sensitivitas dari Bilangan Reproduksi Dasar diperoleh bahwa setiap parameter memberikan pengaruh yang bervariasi terhadap Bilangan Reproduksi Dasar. Kemudian simulasi diberikan untuk mendukung analisa kestabilan di titik ekuilibrium.

**Kata Kunci:** Model Matematika, Transmisi Vertikal, Tingkat Kejadian Jenuh, Analisis Kestabilan, Analisis Sensitivitas.

## ***ABSTRACT***

**MATHEMATICAL MODEL OF INFECTIOUS DISEASE SPREAD WITH VERTICAL TRANSMISSION AND SATURATED INCIDENCE RATE** (By: Ana Rizki Mahmudah; Supervisor: Muhammad Ahsar Karim, Yuni Yulida; 2023; 75 pages)

The spread of infectious diseases can be through two ways, namely horizontal and vertical transmission. Horizontal transmission is the transmission of disease through direct or indirect physical contact with infectious agents, while vertical transmission is direct transmission from infected mothers to fetuses or newborns. One important feature in the disease transmission model is the saturation incidence rate, which is defined as the effect of actions taken against susceptible and infected individuals that can reduce the rate of disease transmission. The purpose of this study is to explain the formation of a mathematical model of the spread of infectious diseases with vertical transmission and saturation incidence rate, determine the equilibrium point and the Basic Reproduction Number, analyze the local and global stability at the equilibrium point of the model, analyze the sensitivity of the Basic Reproduction Number and perform numerical simulations. The methods used in this research are Next Generation Matrix, linearization, Lyapunov function and fourth-order Runge-Kutta method. The result of this research is the formation of a mathematical model of the spread of infectious diseases with vertical transmission and saturated incidence rates. Based on the model, two equilibrium points are obtained, namely the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point, then the Basic Reproduction Number is obtained. Furthermore, the results of local and global stability analysis at the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point are asymptotically stable under certain conditions. In addition, the results of sensitivity analysis of the Basic Reproduction Number obtained that each parameter has a varying influence on the Basic Reproduction Number. Then simulation is given to support the stability analysis at the equilibrium point.

**Keywords:** Mathematical Model, Vertical Transmission, Saturated Incidence Rate, Stability Analysis, Sensitivity Analysis.

## **PRAKATA**

Puji syukur penulis panjatkan kehadrat Allah subhanahu wa ta'ala atas berkat, rahmat, dan karunia serta izin-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Model Matematika Penyebaran Penyakit Menular dengan Transmisi Vertikal dan Tingkat Kejadian Jenuh”. Shalawat serta salam tidak lupa tercurahkan kepada junjungan besar Nabi Muhammad sallallahu alaihi wasallam beserta para keluarga, sahabat, serta pengikut beliau hingga akhir zaman. Penyusunan skripsi ini bertujuan untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam rangka menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika di Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat. Pada proses penyusunan skripsi ini penulis telah diberikan bantuan, dukungan, kerja sama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Selesaiannya penulisan skripsi ini secara khusus penulis persembahkan untuk orang tua dan keluarga tercinta. Pada kesempatan ini juga penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar - besarnya kepada:

1. Bapak Drs. Abdul Gafur, M.Si., M.Sc., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.
2. Bapak Pardi Affandi, S.Si., M.Sc. selaku Koordinator Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.
3. Bapak Dr. Muhammad Ahsar Karim, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan bimbingan serta motivasi selama perkuliahan.
4. Bapak Dr. Muhammad Ahsar Karim, S.Si., M.Sc. dan Ibu Yuni Yulida, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing yang telah sabar membimbing dan mendampingi dari awal hingga akhir penyusunan tulisan ini.
5. Bapak Pardi Affandi, S.Si., M.Sc. dan Ibu Aprida Siska Lestia, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberi masukan dan saran untuk penulisan saya.

6. Dosen-dosen pengajar program studi matematika atas bantuan dan bimbingan, serta kepercayaan dan motivasi yang besar dalam pelaksanaan penelitian dan penyusunan skripsi.
7. Seluruh sahabat, teman, dan rekan mahasiswa matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat, khususnya kepada teman-teman angkatan 2019 serta seluruh pihak yang telah memberikan bantuan, baik berupa masukan, saran, semangat maupun nasihat kepada penulis selama proses penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari dalam penulisan skripsi ini jauh dari kata sempurna dan kekurangan dalam segi penulisan serta teknis maupun penyusunannya. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dalam penyempurnaan skripsi ini. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak dan khususnya mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.

Banjarbaru, 13 November 2023



Ana Rizki Mahmudah  
NIM. 1911011220023

## DAFTAR ISI

	<b>Halaman</b>
<b>HALAMAN JUDUL</b>	<b>i</b>
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b>	<b>ii</b>
<b>PERNYATAAN</b>	<b>iii</b>
<b>ABSTRAK</b>	<b>iv</b>
<i>ABSTRACT</i>	<b>v</b>
<b>PRAKATA</b>	<b>vi</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>viii</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>x</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xi</b>
<b>ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN</b>	<b>xii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Tujuan Penelitian .....	3
1.3 Sistematika Penulisan .....	3
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	<b>5</b>
2.1 Persamaan Diferensial.....	5
2.2 Sistem Persamaan Diferensial.....	6
2.3 Model Epidemik.....	8
2.4 Fungsi Respon Holling .....	9
2.5 Titik Ekuilibrium .....	10
2.6 Analisis Kestabilan Lokal .....	11
2.7 Analisis Kestabilan Global.....	16
2.8 Analisis Sensitivitas .....	18
2.9 Metode Runge-Kutta Orde Empat .....	19
<b>BAB III PROSEDUR PENELITIAN</b>	<b>21</b>
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	<b>23</b>
4.1 Pembentukan Model Matematika Penyebaran Penyakit Menular dengan Transmisi Vertikal dan Tingkat Kejadian Jenuh .....	23



4.2 Titik Ekuilibrium pada Model Matematika Penyebaran Penyakit Menular dengan Transmisi Vertikal dan Tingkat Kejadian Jenuh .....	29
4.3 Kestabilan Model Matematika Penyebaran Penyakit Menular dengan Transmisi Vertikal dan Tingkat Kejadian Jenuh .....	35
4.4 Analisis Sensitivitas pada Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ ) .....	47
4.5 Simulasi Numerik .....	52
<b>BAB V PENUTUP</b>	<b>71</b>
5.1 Kesimpulan .....	71
5.2 Saran .....	72
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>73</b>

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel</b>	<b>Halaman</b>
4.1 Rumus indeks sensitivitas setiap parameter .....	50
4.2 Parameter yang digunakan untuk analisis sensitivitas dan simulasi numerik di titik $E_0$ .....	51
4.3 Nilai indeks sensitivitas terhadap Bilangan Reproduksi Dasar .....	51
4.4 Solusi numerik Persamaan (4.40) di Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit .....	57
4.5 Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi numerik di titik $E^*$ .....	61
4.6 Solusi numerik Persamaan (4.41) di Titik Ekuilibrium Endemik .....	66

## DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
2.1 Diagram alir model epidemiologi $SI$ .....	9
4.1 Diagram alir model matematika penyebaran penyakit menular dengan transmisi vertikal dan tingkat kejadian jenuh.....	24
4.2 Grafik solusi untuk Titik Ekuilibrium $E_0$ .....	58
4.3 Grafik pengaruh nilai $\alpha_1$ terhadap subpopulasi terinfeksi .....	59
4.4 Grafik pengaruh nilai $\alpha_2$ terhadap subpopulasi terinfeksi .....	60
4.5 Grafik pengaruh nilai $\omega$ terhadap subpopulasi terinfeksi .....	60
4.6 Grafik solusi untuk Titik Ekuilibrium $E^*$ .....	67
4.7 Grafik pengaruh nilai $\alpha_1$ terhadap subpopulasi terinfeksi .....	68
4.8 Grafik pengaruh nilai $\alpha_2$ terhadap subpopulasi terinfeksi .....	68
4.9 Grafik pengaruh nilai $\omega$ terhadap subpopulasi terinfeksi .....	69
4.10 Pengaruh nilai $\omega$ terhadap Bilangan Reproduksi Dasar $R_0$ .....	70