



**KONTROL OPTIMAL PADA MODEL MATEMATIKA  
PENULARAN HIV**

**SKRIPSI**

**untuk memenuhi persyaratan  
dalam menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika**

**Oleh:  
Purnama  
NIM. 2011011220010**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMBUNG MANGKURAT  
BANJARBARU**

**2024**

**LEMBAR PENGESAHAN**


**SKRIPSI**

**KONTROL OPTIMAL PADA MODEL MATEMATIKA  
PENULARAN HIV**


Oleh:  
**Purnama**  
2011011220010


telah dipertahankan di depan Dosen Penguji pada tanggal 14 Agustus 2024  
Susunan Dosen Penguji:

**Pembimbing I**


  
Dr. Muhammad Ahsar K., S.Si., M.Sc.  
NIP 198202082005011003

**Dosen Penguji:**

1. Dr. Pardi Affandi, S.Si., M.Sc. 

2. Dr. Na'imah Hijriati, S.Si., M.Si. 

**Pembimbing II**

  
Yuni Yulida, S.Si., M.Sc.  
NIP 198110102005012004

Banjarbaru, September 2024  
Program Studi Matematika FMIPA ULM  
Koordinator,  
  
Dr. Na'imah Hijriati, S.Si., M.Si.  
NIP 197911222008012013



## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam Daftar Pustaka.

Banjarbaru, 22 Agustus 2024



Purnama

NIM 2011011220010

## ABSTRAK

**KONTROL OPTIMAL PADA MODEL MATEMATIKA PENULARAN HIV** (Oleh: Purnama; Pembimbing: Muhammad Ahsar Karim, Yuni Yulida; 2024; 71 halaman)

*Human immunodeficiency Virus* (HIV) adalah sejenis virus yang menginfeksi sel darah putih yang menyebabkan turunnya kekebalan tubuh manusia. Kurangnya kesadaran masyarakat tentang penyakit HIV menjadi faktor utama penyakit ini berkembang dan menyebar dengan cepat. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan pembentukan model matematika penularan HIV, menentukan titik ekuilibrium dan menganalisis kestabilan di titik ekuilibrium pada model penularan HIV, menentukan kontrol optimal, serta melakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta orde 4. Dari penelitian ini, diperoleh bentuk model epidemi SIR (*Susceptible, Infected, Removed*), karena pada HIV individu yang telah mengidap penyakit tersebut belum dapat disembuhkan tetapi pertumbuhan virusnya dapat diatasi dengan pengobatan *antiretroviral* (ARV) dan melakukan tindakan pencegahan sehingga tidak dapat menginfeksi individu yang lain. Berdasarkan model yang terbentuk, diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik pada model. Bilangan reproduksi dasar model ditentukan dengan menggunakan metode matriks *Next Generation*. Kemudian, dengan menggunakan nilai eigen dari matriks Jacobian, diketahui jenis kestabilan kedua model pada masing-masing titik ekuilibrium adalah stabil asimtotik lokal dengan syarat tertentu. Pada model diperoleh bentuk kontrol optimal pada penularan HIV dengan satu pengendali yang diberikan yaitu program penyadaran. Simulasi numerik diberikan untuk mendukung analisis kestabilan di titik ekuilibrium.

**Kata Kunci:** HIV, Model SIR, Analisis Kestabilan, Kontrol Optimal, Simulasi Numerik.

## **ABSTRACT**

***OPTIMAL CONTROL OF A MATHEMATICAL MODEL OF HIV TRANSMISSION*** (By: Purnama; Supervisor: Muhammad Ahsar Karim, Yuni Yulida; 2024; 71 pages)

*Human immunodeficiency virus (HIV) is a type of virus that infects white blood cells, which can lead to a decrease in human immunity. Lack of public awareness about HIV disease is a major factor in the development and rapid spread of this disease. This study aims to explain the formation of a mathematical model of HIV transmission, determine the equilibrium point and analyse the stability at the equilibrium point of the HIV transmission model, determine the optimal control, and perform numerical simulations with the 4th order Runge-Kutta method. From this study, the SIR (Susceptible, Infected, Removed) epidemic model was obtained, because in HIV individuals who have contracted the disease cannot be cured but the growth of the virus can be overcome by antiretroviral (ARV) treatment and taking precautions so that they cannot infect other individuals. Based on the model, the disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point of the model are obtained. The basic reproduction number of the model is determined using the Next Generation matrix method. Then, using the eigenvalues of the Jacobian matrix, it is known that the type of stability of the two models at each equilibrium point is locally asymptotically stable with certain conditions. In the model, the optimal form of control on HIV transmission is obtained with one controller given, namely the awareness programme. Numerical simulation is given to support the analysis of stability at the equilibrium point.*

***Keywords:*** HIV, SIR Model, Stability Analysis, Optimal Control, Numerical Simulation.

## PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah *subhanahu wa ta'ala*, Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat, rahmat, karunia, dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Kontrol Optimal Pada Model Matematika Penularan HIV**". Tidak lupa juga selawat serta salam sellau turcurahkan kepada junjungan besar Nabi Muhammad *sallallahu alaihi wassalam* beserta para keluarga, sahabat, serta pengikut beliau hingga akhir zaman.

Penyusunan skripsi ini bertujuan untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika di Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat. Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, banyak kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam pembahasan materi. Selain itu, proses penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, dukungan, maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Keluarga terutama orang tua, yaitu Bapak Idrus dan Ibu Mursidah, atas dukungan baik secara moral maupun materi yang membuat penulis terus belajar dan menyelesaikan skripsi dengan baik.
2. Bapak Dr. Abdul Gafur, M.Si., M.Sc., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.
3. Ibu Dr. Na'imah Hijriati, S.Si., M.Si. selaku Koordinator Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat, sekaligus dosen penguji II yang telah memberikan arahan, kritik, dan saran sehingga skripsi ini menjadi semakin baik.
4. Bapak Dr. Pardi Affandi, S.Si., M.Sc. selaku dosen penasihat akademik penulis yang telah memberikan arahan, motivasi dan bimbingannya selama perkuliahan. Sekaligus dosen penguji I yang telah memberikan arahan, kritik, dan saran sehingga skripsi ini menjadi semakin baik.

5. Bapak Dr. Muhammad Ahsar Karim, S.Si., M.Sc. dan Ibu Yuni Yulida, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, bimbingan, masukan dan motivasi dalam proses penyusunan skripsi ini.
6. Seluruh dosen pengajar/staf Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat atas ilmu, arahan, dan bantuannya baik selama masa perkuliahan maupun penyusunan skripsi ini.
7. Seluruh teman dan rekan mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat, khususnya angkatan 2020, serta seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu atas bantuan baik berupa motivasi, masukan, dan saran kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini.

Skripsi ini telah diupayakan agar tersaji dengan baik. Namun, karena keterbatasan kemampuan yang dimiliki oleh penulis, ada kemungkinan masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk dijadikan masukan demi kesempurnaan di masa mendatang. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak, khususnya mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.

Banjarbaru, 22 Agustus 2024



Purnama

NIM 2011011220010

## ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

- $S(t)$  : Jumlah subpopulasi yang sehat tetapi rentan terinfeksi HIV (*Susceptible*) pada saat  $t$   
 $I(t)$  : Jumlah subpopulasi yang terinfeksi HIV (*Infected*) pada saat  $t$   
 $R(t)$  : Jumlah subpopulasi yang tidak akan menginfeksi individu yang rentan (*Removed*) pada saat  $t$   
 $\frac{dS}{dt}$  : Perubahan jumlah subpopulasi yang sehat tetapi rentan terinfeksi HIV (*Susceptible*) terhadap waktu  
 $\frac{dI}{dt}$  : Perubahan jumlah subpopulasi yang terinfeksi HIV (*Infected*) terhadap waktu  
 $\frac{dR}{dt}$  : Perubahan jumlah subpopulasi yang tidak akan menginfeksi individu yang rentan (*Removed*) terhadap waktu  
 $\Gamma$  : Laju kelahiran  
 $\beta$  : Laju penularan HIV  
 $\theta$  : Laju kesadaran individu *Susceptible* yang melakukan tindakan pencegahan dari penularan HIV  
 $\gamma$  : Laju kesadaran individu *Infected* yang tidak menginfeksi individu yang *Susceptible*  
 $\mu$  : Laju kematian alami  
 $p$  : Laju kematian yang disebabkan oleh penyakit  
 $E_0$  : Titik ekuilibrium bebas penyakit  
 $E_e$  : Titik ekuilibrium endemik  
 $R_0$  : Bilangan reproduksi dasar  
 $J$  : Matriks Jacobian  
 $G$  : Matriks *Next Generation*  
 $\lambda$  : Nilai eigen dari Persamaan Karakteristik  
HIV : *Human Immunodeficiency*  
WHO : *World Health Organization*  
 $Z(u)$  : Fungsi tujuan

- $u$  : Kontrol program kesadaran
- $u^*$  : Kontrol program kesadaran yang optimal
- $A_1$  : Koefisien bobot dari individu terinfeksi
- $A_2$  : Koefisien bobot dari individu yang tidak aktif secara seksual atau melakukan tindakan pencegahan
- $K$  : Koefisien bobot biaya dari program kesadaran
- $H$  : Fungsi Hamilton
- $\mathcal{L}$  : Fungsi Lagrange
- $\delta$  : Pengali Lagrange

## DAFTAR ISI

	<b>Halaman</b>
LEMBAR PENGESAHAN .....	ii
PERNYATAAN.....	iii
ABSTRAK .....	iv
<i>ABSTRACT</i> .....	v
PRAKATA.....	vi
ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN .....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR .....	xiii
BAB I PENDAHULUAN .....	1
1.1    Latar Belakang .....	1
1.2    Tujuan Penelitian.....	3
1.3    Sistematika Penulisan.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1    Persamaan Diferensial .....	5
2.2    Sistem Persamaan Diferensial .....	6
2.2.1    Sistem Persamaan Diferensial Linear .....	6
2.2.2    Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear.....	7
2.3    Model Epidemi .....	8
2.3.1    Model SIR Klasik.....	8
2.4    Titik Ekuilibrium.....	9
2.5    Bilangan Reproduksi Dasar.....	10
2.6    Analisis Kestabilan.....	11
2.6.1    Linearisasi .....	12
2.6.2    Nilai Eigen dan Vektor Eigen .....	13
2.6.3    Kriteria Routh-Hurwitz .....	15
2.7    HIV .....	17

2.8	Kontrol Optimal .....	18
2.8.1	Persamaan <i>State</i> dan Variabel Kontrol .....	18
2.8.2	Formulasi Masalah Kontrol Optimal .....	18
2.8.3	Fungsi Hamiltonian.....	19
2.8.4	Prinsip Maksimum Pontryagin.....	19
2.9	Metode Lagrange.....	20
2.10	Fungsi Tujuan Kuadratik.....	21
2.11	Metode Runge-Kutta Orde 4 .....	21
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN .....		25
4.1	Pembentukan Model Penyakit HIV.....	25
4.2	Titik Ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar .....	28
4.2.1	Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit ( <b><i>E0</i></b> ).....	28
4.2.2	Bilangan Reproduksi Dasar ( <b><i>R0</i></b> ) .....	29
4.2.3	Titik Ekuilibrium Endemik ( <b><i>Ee</i></b> ).....	31
4.3	Analisis Kestabilan Lokal Model Penyakit HIV .....	33
4.3.1	Linearisasi .....	33
4.3.2	Kestabilan Lokal di Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit ( <b><i>E0</i></b> ) .....	35
4.3.3	Kestabilan Lokal di Titik Ekuilibrium Endemik ( <b><i>Ee</i></b> ) .....	36
4.4	Kontrol Optimal Pada Model Matematika Penularan HIV .....	39
4.5	Simulasi Pada Model Matematika Penularan HIV .....	43
4.5.1	Simulasi Numerik Pada Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.....	44
4.5.2	Simulasi Numerik Pada Titik Ekuilibrium Endemik .....	51
4.5.3	Simulasi Numerik Dengan Kontrol Optimal .....	58
5.1	Kesimpulan.....	61
5.2	Saran .....	62
DAFTAR PUSTAKA .....		63