



**MODEL MATEMATIKA PENYAKIT MENULAR DENGAN  
DUA STRAIN DAN AMPLIFIKASI**

**SKRIPSI**

**untuk memenuhi persyaratan  
dalam menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika**

**Oleh:**

**MULIDYA**

**NIM. 2111011320001**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMBUNG MANGKURAT  
BANJARBARU  
2025**

**LEMBAR PENGESAHAN**

**SKRIPSI**

**MODEL MATEMATIKA PENYAKIT MENULAR DENGAN DUA  
STRAIN DAN AMPLIFIKASI**

Oleh:

**Mulidya**

**NIM. 2111011320001**

telah dipertahankan di depan Dosen Penguji pada tanggal 24 Januari 2025

Susunan Dosen Penguji:

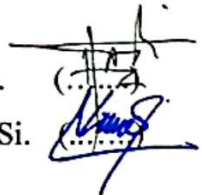
**Pembimbing I**



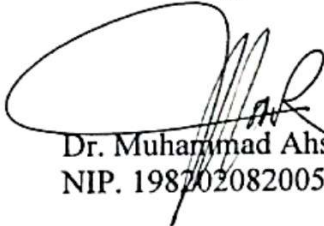
Yuni Yulida, S.Si., M.Sc.  
NIP. 198110102005012004

**Dosen Penguji:**

1. Dr. Pardi Affandi, S.Si., M.Sc.
2. Dr. Na'imah Hijriati, S.Si., M.Si.



**Pembimbing II**



Dr. Muhammad Ahsar K., S.Si., M.Sc.  
NIP. 198202082005011003

Banjarbaru, 20 Februari 2025

Program Studi Matematika FMIPA ULM

Koordinator,



Dr. Na'imah Hijriati, S.Si., M.Si.  
NIP. 197911222008012013

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam Daftar Pustaka.

Banjarbaru, 20 Februari 2025



Mulidya  
NIM. 2111011320001

## ABSTRAK

**MODEL MATEMATIKA PENYAKIT MENULAR DENGAN DUA STRAIN DAN AMPLIFIKASI** (Oleh: Mulidya; Pembimbing: Yuni Yulida, Muhammad Ahsar Karim; 2024; 94 Halaman)

Penyakit menular merupakan penyakit yang menyebar dari satu individu ke individu lainnya melalui berbagai media, dan sering kali disebabkan oleh mikroorganisme seperti bakteri, virus, parasit, ataupun jamur. Beberapa mikroorganisme ini dapat bermutasi membentuk strain baru yang lebih resisten terhadap obat. Amplifikasi adalah proses dimana strain yang sensitif terhadap obat bermutasi menjadi strain resisten, sehingga memperburuk penularan penyakit. Pada penelitian ini dibahas tentang model matematika penyakit menular dengan dua strain dan mengkomodir terjadinya amplifikasi. Tujuan dari penelitian ini adalah menjelaskan pembentukan model matematika, menentukan titik ekuilibrium, menentukan bilangan reproduksi dasar, menganalisis kestabilan model, melakukan analisis sensitivitas, serta melakukan simulasi numerik. Adapun metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Next Generation Matrix*, linearisasi, dan metode Runge-Kutta orde empat. Hasil dari penelitian ini adalah terbentuknya model penyakit menular dengan dua strain dan mengkomodir amplifikasi. Dari model yang terbentuk, diperoleh tiga titik ekuilibrium, yaitu: titik ekuilibrium bebas penyakit, titik ekuilibrium endemik monoeksistensi, dan titik ekuilibrium endemik koeksistensi, serta diperoleh dua bilangan reproduksi dasar untuk masing-masing strain. Selain itu, diperoleh ketiga titik ekuilibrium stabil asimtotik, disertai syarat masing-masing. Analisis sensitivitas dari kedua bilangan reproduksi dasar diperoleh bahwa setiap parameter memberikan pengaruh yang bervariasi terhadap bilangan reproduksi dasar masing-masing strain. Analisis-analisis ini kemudian juga diperkuat dengan hasil simulasi numerik.

**Kata Kunci:** Penyakit Menular, Amplifikasi, Model Matematika, Analisis Kestabilan, Analisis Sensitivitas.

## **ABSTRACT**

**MATHEMATICAL MODEL OF INFECTIOUS DISEASES WITH TWO STRAINS AND AMPLIFICATION** (By: Mulidya; Supervisors: Yuni Yulida, Muhammad Ahsar Karim; 2024; 94 Pages)

*Infectious diseases are illnesses that spread from one individual to another through various mediums, often caused by microorganisms such as bacteria, viruses, parasites, or fungi. Some of these microorganisms can mutate, forming new strains that are more resistant to drugs. Amplification is a process where drug-sensitive strains mutate into drug-resistant strains, exacerbating disease transmission. This study discusses a mathematical model of infectious diseases with two strains and incorporates the occurrence of amplification. The objectives of this study are to construct the mathematical model, determine equilibrium points, calculate basic reproduction numbers, analyze the stability of the model, perform sensitivity analysis, and conduct numerical simulations. The methods used in this research include the Next Generation Matrix, linearization, and the fourth-order Runge-Kutta method. The results of the study include the development of an infectious disease model with two strains that accommodates amplification. From the model, three equilibrium points were identified: the disease-free equilibrium, the mono-existence endemic equilibrium, and the coexistence endemic equilibrium. Additionally, two basic reproduction numbers were derived for each strain. All three equilibrium points were found to be asymptotically stable, subject to specific conditions. Sensitivity analysis of the two basic reproduction numbers revealed that each parameter has varying impacts on the reproduction numbers of each strain. These analyses were further validated by numerical simulation results.*

**Keywords:** *Infectious Diseases, Amplification, Mathematical Model, Stability Analysis, Sensitivity Analysis*

## PRAKATA

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah *subhanahu wa ta'ala*, Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat, rahmat, karunia, dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**MODEL MATEMATIKA PENYAKIT MENULAR DENGAN DUA STRAIN DAN AMPLIFIKASI**”. Tidak lupa juga selawat serta salam selalu tercurahkan kepada junjungan besar Nabi Muhammad *sallallahu alaihi wasallam* beserta para keluarga, sahabat, serta pengikut beliau hingga akhir zaman.

Penyusunan skripsi ini bertujuan untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika di Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat. Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, banyak kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam pembahasan materi. Selain itu, proses penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, dukungan, maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Abdul Gafur, M.Si, M.Sc, Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.
2. Ibu Dr. Na'imah Hijriati, S.Si., M.Si. selaku Koordinator Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.
3. Ibu Thresye, S.Si., M.Si. selaku dosen penasihat akademik penulis yang telah memberikan arahan, motivasi, dan bimbingan selama perkuliahan.
4. Ibu Yuni Yulida, S.Si., M.Sc. dan Bapak Dr. Muhammad Ahsar Karim, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, bimbingan, masukan, dan motivasi dalam proses penyusunan skripsi ini.
5. Bapak Dr. Pardi Affandi, S.Si., M.Sc. dan Ibu Dr. Na'imah Hijriati, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan arahan, kritik, dan saran sehingga skripsi ini menjadi semakin baik.

6. Seluruh dosen pengajar/staf Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat atas ilmu, arahan, dan bantuannya baik selama masa perkuliahan maupun penyusunan skripsi ini.
7. Seluruh teman dan rekan mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat, khususnya angkatan 2021, serta seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu atas bantuan, baik berupa motivasi, masukan, dan saran kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini.

Skripsi ini telah diupayakan agar tersaji dengan baik. Namun, karena keterbatasan kemampuan yang dimiliki oleh penulis, ada kemungkinan masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk dijadikan masukan demi kesempurnaan di masa mendatang. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak, khususnya mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.

Banjarbaru,



Mulidya  
NIM. 2111011320001

## ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

- $S(t)$  : Jumlah individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi (*Susceptible*) pada saat  $t$
- $I_s(t)$  : Jumlah individu yang terinfeksi strain sensitif terhadap obat pada saat  $t$
- $I_r(t)$  : Jumlah individu yang terinfeksi strain resisten terhadap obat pada saat  $t$
- $R(t)$  : Jumlah individu yang sembuh dari infeksi (*Recovered*) pada saat  $t$
- $\frac{dS}{dt}$  : Perubahan jumlah individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi (*Susceptible*) terhadap waktu
- $\frac{dI_s}{dt}$  : Perubahan jumlah individu yang terinfeksi strain sensitif terhadap waktu
- $\frac{dI_r}{dt}$  : Perubahan jumlah individu yang terinfeksi strain resisten terhadap waktu
- $\frac{dR}{dt}$  : Perubahan jumlah individu yang sembuh dari infeksi (*Recovered*) terhadap waktu
- $\Lambda$  : Laju kelahiran
- $\mu$  : Laju kematian alami
- $\rho$  : Proporsi individu yang mengalami amplifikasi (dari strain sensitif terhadap obat menjadi strain resisten terhadap obat selama pengobatan atau penyembuhan)
- $\beta_s$  : Laju penularan individu yang terinfeksi strain sensitif terhadap obat
- $\beta_r$  : Laju penularan individu yang terinfeksi strain resisten terhadap obat
- $\omega_s$  : Laju kesembuhan individu yang terinfeksi strain sensitif terhadap obat
- $\omega_r$  : Laju kesembuhan individu yang terinfeksi strain resisten terhadap obat
- $\phi_s$  : Laju kematian individu akibat terinfeksi strain sensitif terhadap obat
- $\phi_r$  : Laju kematian individu akibat terinfeksi strain resisten terhadap obat

- $\chi_s$  : Jumlah laju keluar individu yang terinfeksi strain sensitif terhadap obat
- $\chi_r$  : Jumlah laju keluar individu yang terinfeksi strain resisten terhadap obat
- $\beta$  : Laju efektif kontak individu yang terinfeksi
- $r$  : Laju kesembuhan individu yang terinfeksi
- $E^0$  : Titik ekuilibrium bebas penyakit
- $E^*$  : Titik ekuilibrium endemik monoeksistensi
- $E^\#$  : Titik ekuilibrium endemik koeksistensi
- $\mathcal{R}_0$  : Bilangan reproduksi dasar
- $\mathcal{R}_{0s}$  : Bilangan reproduksi dasar strain sensitif terhadap obat
- $\mathcal{R}_{0r}$  : Bilangan reproduksi dasar strain resisten terhadap obat
- $J$  : Matriks Jacobian
- $K$  : Matriks *Next Generation*
- $I$  : Matriks identitas
- $\lambda$  : Nilai eigen dari persamaan karakteristik
- $\mathcal{S}$  : Indeks sensitivitas
- WHO : *World Health Organization*

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	<b>i</b>
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	<b>ii</b>
<b>PERNYATAAN</b> .....	<b>iii</b>
<b>ABSTRAK</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>v</b>
<b>PRAKATA</b> .....	<b>vi</b>
<b>ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN</b> .....	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>x</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xii</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	<b>xiv</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Tujuan Penelitian .....	2
1.3 Sistematika Penulisan .....	3
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	<b>5</b>
2.1 Persamaan Diferensial.....	5
2.2 Sistem Persamaan Diferensial.....	6
2.2.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear .....	6
2.2.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear.....	8
2.3 Model SIR Klasik .....	8
2.4 Titik Ekuilibrium .....	9
2.5 Bilangan Reproduksi Dasar .....	9
2.6 Analisis Kestabilan .....	11
2.6.1 Linearisasi .....	11
2.6.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen .....	13
2.6.3 Kriteria Routh-Hurwitz .....	15
2.7 Analisis Sensitivitas .....	16
2.8 Metode Runge-Kutta Orde Empat .....	17
2.9 Penyakit Menular .....	17

<b>BAB III METODOLOGI PENELITIAN .....</b>	<b>19</b>
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....</b>	<b>21</b>
4.1 Pembentukan Model .....	21
4.2 Titik Ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar .....	26
4.2.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit ( $E^0$ ) .....	27
4.2.2 Bilangan Reproduksi Dasar .....	28
4.2.3 Titik Ekuilibrium Endemik Monoeksistensi ( $E^*$ ) .....	30
4.2.4 Titik Ekuilibrium Endemik Koeksistensi ( $E^\#$ ).....	31
4.3 Kestabilan Lokal Model Matematika Penyakit Menular dengan Dua Strain dan Amplifikasi.....	35
4.3.1 Kestabilan Lokal pada Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.....	36
4.3.2 Kestabilan Lokal pada Titik Ekuilibrium Endemik Monoeksistensi ...	38
4.3.3 Kestabilan Lokal pada Titik Ekuilibrium Endemik Koeksistensi.....	42
4.4 Analisis Sensitivitas pada Bilangan Reproduksi Dasar .....	49
4.4.1 Analisis Sensitivitas pada Bilangan Reproduksi Dasar Strain Sensitif terhadap Obat ( $\mathcal{R}_{0s}$ ) .....	50
4.4.2 Analisis Sensitivitas pada Bilangan Reproduksi Dasar Strain Resisten terhadap Obat ( $\mathcal{R}_{0r}$ ) .....	52
4.5 Simulasi Numerik .....	54
4.5.1 Simulasi Numerik untuk Analisis Sensitivitas.....	54
4.5.2 Simulasi Numerik untuk Analisis Kestabilan .....	60
4.5.3 Simulasi Numerik untuk Melihat Pengaruh Variasi Parameter.....	82
<b>BAB V PENUTUP .....</b>	<b>87</b>
5.1 Kesimpulan .....	87
5.2 Saran .....	89
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>90</b>
<b>LAMPIRAN.....</b>	<b>92</b>

## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
<b>Gambar 2.1</b> Diagram alir model SIR Kermack-Mckendrick .....	8
<b>Gambar 4.1</b> Diagram alir model matematika penyakit menular dengan dua strain dan amplifikasi.....	23
<b>Gambar 4.2</b> Perubahan nilai $\mathcal{R}_{0S}$ terhadap variasi nilai $\Lambda$ .....	55
<b>Gambar 4.3</b> Perubahan nilai $\mathcal{R}_{0S}$ terhadap variasi nilai $\mu$ .....	56
<b>Gambar 4.4</b> Perubahan nilai $\mathcal{R}_{0S}$ terhadap variasi nilai $\beta_S$ .....	56
<b>Gambar 4.5</b> Perubahan nilai $\mathcal{R}_{0S}$ terhadap variasi nilai $\omega_S$ .....	56
<b>Gambar 4.6</b> Perubahan nilai $\mathcal{R}_{0S}$ terhadap variasi nilai $\phi_S$ .....	57
<b>Gambar 4.7</b> Perubahan nilai $\mathcal{R}_{0R}$ terhadap variasi nilai $\Lambda$ .....	58
<b>Gambar 4.8</b> Perubahan nilai $\mathcal{R}_{0R}$ terhadap variasi nilai $\mu$ .....	59
<b>Gambar 4.9</b> Perubahan nilai $\mathcal{R}_{0R}$ terhadap variasi nilai $\beta_r$ .....	59
<b>Gambar 4.10</b> Perubahan nilai $\mathcal{R}_{0R}$ terhadap variasi nilai $\omega_r$ .....	59
<b>Gambar 4.11</b> Perubahan nilai $\mathcal{R}_{0R}$ terhadap variasi nilai $\phi_r$ .....	60
<b>Gambar 4.12</b> Simulasi di titik ekuilibrium bebas penyakit .....	66
<b>Gambar 4.13</b> Simulasi di titik ekuilibrium endemik monoeksistensi.....	74
<b>Gambar 4.14</b> Simulasi di titik ekuilibrium endemik koeksistensi.....	81
<b>Gambar 4.15</b> Pengaruh variasi parameter $\beta_S$ terhadap subpopulasi <i>Infected</i> strain sensitif.....	83
<b>Gambar 4.16</b> Pengaruh variasi parameter $\beta_S$ terhadap subpopulasi <i>Infected</i> strain resisten .....	83
<b>Gambar 4.17</b> Pengaruh variasi parameter $\beta_r$ terhadap subpopulasi <i>Infected</i> strain sensitif.....	84
<b>Gambar 4.18</b> Pengaruh variasi parameter $\beta_r$ terhadap subpopulasi <i>Infected</i> strain resisten .....	84
<b>Gambar 4.19</b> Pengaruh variasi parameter $\rho$ terhadap subpopulasi <i>Infected</i> strain sensitif.....	85
<b>Gambar 4.20</b> Pengaruh variasi parameter $\rho$ terhadap subpopulasi <i>Infected</i> strain resisten .....	85

## DAFTAR TABEL

	Halaman
<b>Tabel 4.1</b> Rumus indeks sensitivitas untuk strain sensitif terhadap obat .....	51
<b>Tabel 4.2</b> Rumus indeks sensitivitas untuk strain resisten terhadap obat.....	53
<b>Tabel 4.3</b> Parameter yang digunakan untuk melakukan analisis sensitivitas pada $\mathcal{R}_{0s}$ .....	54
<b>Tabel 4.4</b> Nilai indeks sensitivitas terhadap $\mathcal{R}_{0s}$ .....	55
<b>Tabel 4.5</b> Parameter yang digunakan untuk melakukan analisis sensitivitas pada $\mathcal{R}_{0r}$ .....	57
<b>Tabel 4.6</b> Nilai indeks sensitivitas terhadap $\mathcal{R}_{0r}$ .....	58
<b>Tabel 4.7</b> Nilai awal yang digunakan untuk simulasi titik $E^0$ .....	60
<b>Tabel 4.8</b> Parameter yang digunakan untuk simulasi titik $E^0$ .....	61
<b>Tabel 4.9</b> Hasil simulasi untuk solusi numerik pada Persamaan (4.48) di titik ekuilibrium bebas penyakit.....	66
<b>Tabel 4.10</b> Nilai awal yang digunakan untuk simulasi titik $E^*$ .....	67
<b>Tabel 4.11</b> Parameter yang digunakan untuk simulasi titik $E^*$ .....	68
<b>Tabel 4.12</b> Hasil simulasi untuk solusi numerik pada Persamaan (4.49) di titik ekuilibrium endemik monoeksistensi.....	73
<b>Tabel 4.13</b> Nilai awal yang digunakan untuk simulasi titik $E^\#$ .....	75
<b>Tabel 4.14</b> Parameter yang digunakan untuk simulasi titik $E^\#$ .....	75
<b>Tabel 4.15</b> Hasil simulasi untuk solusi numerik pada Persamaan (4.50) di titik ekuilibrium endemik koeksistensi.....	81

## DAFTAR LAMPIRAN

### Lampiran

1. Gambar simulasi di titik ekuilibrium bebas penyakit pada masing-masing subpopulasi yaitu, subpopulasi *Susceptible*, subpopulasi *Infected* strain sensitif, dan subpopulasi *Infected* strain resisten
2. Gambar simulasi di titik ekuilibrium endemik monoeksistensi pada masing-masing subpopulasi yaitu, subpopulasi *Susceptible*, subpopulasi *Infected* strain sensitif, dan subpopulasi *Infected* strain resisten
3. Gambar simulasi di titik ekuilibrium endemik koeksistensi pada masing-masing subpopulasi yaitu, subpopulasi *Susceptible*, subpopulasi *Infected* strain sensitif, dan subpopulasi *Infected* strain resisten
4. Gambar pengaruh variasi parameter  $\beta_s$  terhadap subpopulasi *Susceptible*
5. Gambar pengaruh variasi parameter  $\beta_r$  terhadap subpopulasi *Susceptible*
6. Gambar pengaruh variasi parameter  $\rho$  terhadap subpopulasi *Susceptible*