



**KONTROL OPTIMAL PADA MODEL LUMPY SKIN DISEASE**

**SKRIPSI**

**untuk memenuhi persyaratan  
dalam menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika**

**Oleh:**

**FATMAWATI  
NIM. 2111011120002**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMBUNG MANGKURAT  
BANJARBARU  
2025**

**SKRIPSI**  
**KONTROL OPTIMAL PADA MODEL LUMPY SKIN DISEASE**

Oleh:  
**Fatmawati**  
**2111011120002**

telah dipertahankan di depan Dosen Penguji pada tanggal 16 Januari 2025  
Susunan Dosen Penguji:


**Pembimbing I**



Dr. Pardi Affandi, S. Si., M. Sc.  
NIP 197806112005011001

**Dosen Penguji:**

1. Dr. Muhammad Ahsar K., S. Si., M. Sc. ()

2. Aprida Siska Lestia, S. Si., M. Si. ()

**Pembimbing II**



Drs. Faisal, M. Si.  
NIP 196309021992031001

Banjarbaru, 24 Januari 2025

Program Studi Matematika FMIPA ULM

Koordinator,



Amah Hijriati, S. Si., M. Si.  
NIP 197911222008012013

## **PERNYATAAN**

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam Daftar Pustaka.

Banjarbaru, 24 Januari 2025



Fatmawati

NIM. 2111011120002

## ABSTRAK

**KONTROL OPTIMAL PADA MODEL LUMPY SKIN DISEASE** (Oleh: Fatmawati; Pembimbing: Pardi Affandi, Faisal, 2025; 47 halaman)

*Lumpy Skin Disease* (LSD) merupakan penyakit lintas batas pada sapi yang disebabkan oleh virus dari genus *Capripoxvirus*. Penyakit ini membawa dampak ekonomi yang signifikan terhadap sektor peternakan karena menyebabkan penurunan harga jual sapi, penurunan tingkat produktivitas sapi serta peningkatan biaya untuk pengobatan dan pencegahan penyakit. Oleh karena itu, perlu adanya strategi pengendalian yang efektif untuk mengatasi permasalahan tersebut, salah satunya berupa pemberian vaksin menggunakan vaksin hidup yang dilemahkan. Kemudian, dampak dari pemberian vaksin akan diselidiki menggunakan pendekatan kontrol optimal melalui pemodelan matematika penyebaran LSD. Model matematika yang digunakan untuk penyebaran penyakit ini terdiri dari empat subpopulasi yaitu subpopulasi *Susceptible* ( $S$ ), subpopulasi *Exposed* ( $E$ ), subpopulasi *Infected* ( $I$ ) dan subpopulasi *Recovered* ( $R$ ). Tujuan dari penelitian ini adalah menjelaskan terbentuknya model matematika penyebaran LSD, menentukan kontrol optimal pada model matematika penyebaran LSD serta melakukan simulasi numerik. Pada model matematika yang terbentuk diberikan satu variabel kontrol yaitu vaksinasi. Penyelesaian kontrol optimal pada model penyebaran LSD dilakukan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Prinsip tersebut diterapkan untuk memperoleh kondisi yang optimal pada model matematika penyebaran LSD dan juga untuk memperoleh persamaan *state* dan persamaan *costate*, yang kemudian disimulasikan menggunakan *software* MATLAB. Hasil dari penelitian ini adalah terbentuknya model matematika penyebaran LSD dan diperoleh kontrol optimal untuk model dengan satu variabel kontrol yaitu vaksinasi. Berdasarkan hasil simulasi numerik, variabel kontrol yang diterapkan menunjukkan bahwa vaksinasi secara signifikan mengurangi jumlah individu pada subpopulasi *Infected* ( $I$ ) dan meningkatkan jumlah individu pada subpopulasi *Recovered* ( $R$ ). Selain itu, penerapan vaksinasi yang optimal juga membantu menurunkan biaya pengendalian LSD.

**Kata Kunci:** *Lumpy Skin Disease*, Model SEIRS, Kontrol Optimal, Prinsip Maksimum Pontryagin.

## ABSTRACT

**OPTIMAL CONTROL IN THE LUMPY SKIN DISEASE MODEL** (By: Fatmawati; Advisors: Pardi Affandi, Faisal, 2025; 47 pages)

*Lumpy Skin Disease* (LSD) is a transboundary disease in cattle caused by a virus from the genus *Capripoxvirus*. This disease has a significant economic impact on the livestock sector because it causes a decrease in the selling price of cattle, a decrease in the level of cattle productivity and an increase in the cost of treatment and prevention of the disease. Therefore, an effective control strategy is needed to overcome this problem, one of which is by administering vaccines using live attenuated vaccines. Then, the impact of the vaccination will be studied using an optimal control approach through mathematical modeling of the spread of LSD. The mathematical model used for the spread of this disease consists of four subpopulations, namely the *Susceptible* (S) subpopulation, the *Exposed* (E) subpopulation, the *Infected* (I) subpopulation and the *Recovered* (R) subpopulation. The purpose of this study was to explain the formation of a mathematical model of the spread of LSD, determine optimal control in the mathematical model of the spread of LSD and conduct numerical simulations. In the mathematical model formed, one control variable is given, namely vaccination. The solution to optimal control in the LSD spread model is carried out using the Pontryagin maximum principle. The principle is applied to obtain optimal conditions in the mathematical model of LSD spread and also to obtain state equations and costatic equations which are then simulated using *software* MATLAB. The results of this study are the formation of a mathematical model of LSD spread and the optimal control for a model with one control variable, namely vaccination. Based on the results of numerical simulations, the applied control variables show that vaccination significantly reduces the number of individuals in the *Infected* subpopulation (I) and increases the number of individuals in the *Recovered* subpopulation (R). In addition, the optimal implementation of vaccination also helps reduce the cost of LSD control.

**Keywords:** *Lumpy Skin Disease*, SEIRS Model, Optimal Control, Pontryagin's Maximum Principle.

## **PRAKATA**

Puji Syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Subhanahu wa ta'ala atas berkat, rahmat, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Kontrol Optimal pada Model Lumpy Skin Disease”. Shalawat serta salam tidak lupa pula tercurahkan kepada Nabi Muhammad Shallallahu ‘alaihi Wa Sallam beserta para keluarga, kerabat, sahabat serta pengikut beliau hingga akhir zaman. Penulisan skripsi ini bertujuan untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika di Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.

Proses penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, dukungan serta kerja sama dan bimbingan dari berbagai pihak. Selesainya penulisan skripsi ini penulis persembahkan secara khusus untuk diri sendiri dan kedua orang tua yang begitu hebat dan tentunya paling berjasa dalam hidup penulis. Terima kasih atas kepercayaan yang telah diberikan, pengorbanan, cinta dan kasih sayang, doa, motivasi, semangat dan nasihat, serta tanpa lelah memberikan dukungan terhadap segala keputusan dan pilihan hidup penulis.

Pada kesempatan kali ini, penulis juga ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat Banjarbaru.
2. Koordinator Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat Banjarbaru.
3. Bapak Dr. Pardi Affandi, S. Si., M. Sc. selaku pembimbing utama yang telah membimbing dan mendampingi dari awal hingga akhir penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Drs. Faisal, M. Si. selaku pembimbing pendamping yang telah membimbing dan mendampingi dari awal hingga akhir penyusunan skripsi ini.

5. Bapak Dr. Muhammad Ahsar K., S. Si., M. Sc. dan Ibu Aprida Siska Lestia, S. Si., M. Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran serta kritikan yang sangat bermanfaat untuk perbaikan isi skripsi ini.
6. Ibu Thresye, S. Si., M. Si. selaku dosen penasihat akademik yang telah memberikan bimbingan, dukungan, arahan, dan banyak motivasi selama masa perkuliahan.
7. Para dosen Program Studi Matematika atas bimbingan dan motivasi selama masa perkuliahan.
8. Teman kecil penulis Titik Intan Sari, S. Psi. yang senantiasa mendengarkan keluh kesah dan curahan hati penulis.
9. Sahabat penulis, Rahmadina dan Susanti yang telah kebersamaan dari awal masa perkuliahan hingga akhir penulisan skripsi ini.
10. Seluruh teman dan rekan mahasiswa matematika Angkatan 2021 Program Studi Matematika yang telah memberikan semangat maupun nasihat serta dukungan kepada penulis selama proses penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari masih terdapat banyak kekurangan baik dari segi penulisan maupun materi yang dibahas. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk dijadikan masukan demi penyempurnaan skripsi ini. Akhir kata, penulis berharap skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak khususnya mahasiswa Program Studi Matematika Universitas Lambung Mangkurat.

Banjarbaru, 24 Januari 2025



Fatmawati

NIM. 2111011120002

## ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

$S(t)$	:	Jumlah individu pada subpopulasi yang rentan ( <i>Susceptible</i> ) pada saat $t$
$E(t)$	:	Jumlah individu pada subpopulasi yang terpapar ( <i>Exposed</i> ) LSD pada saat $t$
$I(t)$	:	Jumlah individu pada subpopulasi yang terinfeksi ( <i>Infected</i> ) pada saat $t$
$R(t)$	:	Jumlah individu pada subpopulasi yang sembuh ( <i>Recovered</i> ) pada saat $t$
$\frac{dS}{dt}$	:	Perubahan jumlah individu pada subpopulasi <i>Susceptible</i> terhadap waktu
$\frac{dE}{dt}$	:	Perubahan jumlah individu pada subpopulasi <i>Exposed</i> terhadap waktu
$\frac{dI}{dt}$	:	Perubahan jumlah individu pada subpopulasi <i>Infected</i> terhadap waktu
$\frac{dR}{dt}$	:	Perubahan jumlah individu pada subpopulasi <i>Recovered</i> terhadap waktu
$\alpha$	:	Laju kelahiran
$\beta$	:	Laju transmisi (kontak langsung) antara subpopulasi <i>Susceptible</i> dengan subpopulasi <i>Infected</i> (atau sebaliknya)
$\gamma$	:	Laju perpindahan individu pada subpopulasi <i>Exposed</i> ke subpopulasi <i>Infected</i>
$\omega$	:	Laju kesembuhan individu pada subpopulasi <i>Infected</i> dengan adanya <i>treatment</i>
$\theta$	:	Laju penurunan kekebalan alami aktif individu pada subpopulasi <i>Recovered</i>
$\phi$	:	Laju kematian alami
$J$	:	<i>Performance Index</i>

$u$	:	Kontrol vaksinasi terhadap individu pada subpopulasi <i>Susceptible</i>
$A$	:	Koefisien bobot biaya akibat <i>treatment</i> yang tidak efektif pada individu terinfeksi
$B$	:	Koefisien bobot biaya yang dikenakan pada kontrol vaksinasi
$\mathcal{H}$	:	Fungsi Hamiltonian
$\min(a, b)$	:	Minimum di antara $a, b$
$\max(a, b)$	:	Maksimum di antara $a, b$

## DAFTAR ISI

<b>LEMBAR PENGESAHAN</b>	<b>ii</b>
<b>PERNYATAAN</b>	<b>iii</b>
<b>ABSTRAK</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>v</b>
<b>PRAKATA</b>	<b>vi</b>
<b>ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN</b>	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>x</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xii</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xiii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Tujuan Penelitian .....	3
1.3 Sistematika Penulisan .....	3
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	<b>5</b>
2.1 Persamaan Diferensial .....	5
2.2 Sistem Persamaan Diferensial.....	6
2.2.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier .....	6
2.2.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear .....	7
2.3 Fungsi Lagrange.....	8
2.4 Fungsi Hamiltonian .....	8
2.5 Kontrol Optimal .....	9
2.6 Prinsip Maksimum Pontryagin .....	10
2.7 Model Epidemik SEIR .....	11
2.8 <i>Lumpy Skin Disease (LSD)</i> .....	12
2.9 Strategi Kontrol.....	12

2.10 Metode <i>Forward-Backward</i> Runge Kutta Orde Empat .....	13
<b>BAB III METODE PENELITIAN</b>	<b>15</b>
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	<b>17</b>
4.1 Pembentukan Model Penyebaran LSD.....	17
4.2 Penyelesaian Kontrol Optimal .....	21
4.3 Simulasi Numerik.....	27
<b>BAB V PENUTUP</b>	<b>43</b>
5.1 Kesimpulan.....	43
5.2 Saran.....	44
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>45</b>

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 3. 1</b> Diagram Alir Metode Penelitian.....	16
<b>Gambar 4. 1</b> Model Penyebaran LSD.....	18
<b>Gambar 4. 2</b> Hasil Simulasi Persamaan (4.5) .....	36
<b>Gambar 4. 3</b> Hasil Simulasi Persamaan (4.13) .....	38
<b>Gambar 4. 4</b> Hasil Simulasi Nilai $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dan $\lambda_4$ .....	40
<b>Gambar 4. 5</b> Nilai $u^*(t)$ .....	42

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 4. 1</b> Parameter Model SEIRS Penyebaran LSD .....	28
<b>Tabel 4. 2</b> Nilai Awal Model SEIRS Penyebaran LSD.....	28
<b>Tabel 4. 3</b> Hasil Simulasi Persamaan (4.5).....	34
<b>Tabel 4. 4</b> Hasil Simulasi Persamaan (4.13).....	37
<b>Tabel 4. 5</b> Hasil Simulasi Persamaan (4.14).....	39
<b>Tabel 4. 6</b> Nilai $u^*(t)$ .....	40