



**KONTROL OPTIMAL MODEL SEIR-SEI PADA PENYEBARAN
PENYAKIT DEMAM BERDARAH**

SKRIPSI

**untuk memenuhi persyaratan
dalam menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika**

Oleh:

MARIATUL QIBTIAH

NIM. 2011011220004

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMBUNG MANGKURAT
BANJARBARU
2023/2024**

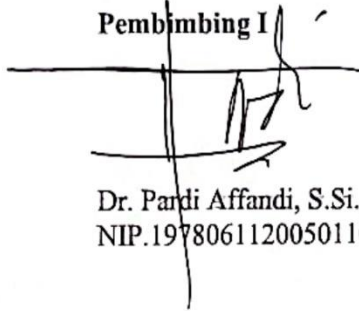
SKRIPSI

**KONTROL OPTIMAL MODEL SEIR-SEI PADA PENYEBARAN
PENYAKIT DEMAM BERDARAH**

Oleh:
Mariatul Qibtiah
NIM.2011011220004

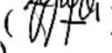
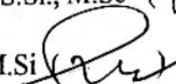
telah dipertahankan di depan Dosen Penguji pada tanggal 18 September 2024
Susunan Dosen Penguji:

Pembimbing I



Dr. Pardi Affandi, S.Si., M.Sc.
NIP.197806112005011001

Dosen Penguji:

1. Yuni Yulida, S.Si., M.Sc. 
2. Drs. Faisal, M.Si. 

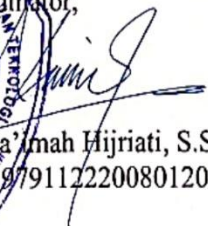
Pembimbing II



Oni Soesanto, S.Si., M.Si.
NIP.197301262005011003



Banjarbaru, 2024
Program Studi Matematika FMIPA ULM
Koordinator,


Niamah Hijriati, S.Si., M.Si.
NIP.197911222008012013

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam Daftar Pustaka.

Banjarbaru, 02 Oktober 2024



Mariatul Qibtiah

NIM.2011011220004

ABSTRAK

KONTROL OPTIMAL MODEL SEIR-SEI PADA PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH (Oleh: Mariatul Qibtiah; Pembimbing: Pardi Affandi, Oni Soesanto, 2024: 105 halaman)

Demam berdarah adalah penyakit menular yang ditularkan oleh nyamuk *Aedes Aegypti* sebagai vektor penyebaran penyakit utama virus *dengue*. Penyakit ini dengan cepat menyebar di seluruh dunia, terutama di negara-negara tropis dan subtropis. Penyebaran penyakit demam berdarah dapat dimodelkan menggunakan pemodelan matematika dalam bentuk persamaan diferensial biasa. Tujuan penelitian ini adalah menjelaskan pembentukan model penyebaran penyakit demam berdarah, menganalisis kestabilan dari titik kesetimbangan model, menggunakan bentuk kontrol optimal dan membuat simulasi numerik. Hasil dari penelitian ini adalah terbentuknya model SEIR-SEI yang dibagi menjadi dua populasi yaitu, populasi manusia (*host*) dan nyamuk (vektor). Berdasarkan model tersebut diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu, titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Kemudian, diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0) dengan menggunakan metode *Next Generation Matrix* dan analisis kestabilan model menggunakan metode linearisasi dan Kriteria Routh-Hurwitz. Selanjutnya, didapatkan hasil analisis kestabilan di titik kesetimbangan bebas penyakit adalah stabil asimtotik lokal dengan syarat $R_0 < 1$, sedangkan di titik kesetimbangan endemik adalah stabil asimtotik lokal dengan syarat $R_0 > 1$. Serta diperoleh bentuk kontrol optimal pada model penyebaran penyakit demam berdarah yaitu berupa kontrol vaksinasi, dan penyemprotan insektisida. Hasil simulasi numerik kontrol optimal menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat menunjukkan ketika menerapkan dua kontrol berupa vaksinasi dan penyemprotan insektisida, tingkat infeksi demam berdarah menurun seiring waktu.

Kata Kunci : Demam Berdarah, Model SEIR-SEI, Analisis Kestabilan, Kontrol Optimal.

ABSTRACT

OPTIMAL CONTROL OF THE SEIR-SEI MODEL OF THE TRANSMISSION OF DENGUE DISEASE (by: Mariatul Qibtiah, Advisors: Pardi Affandi, Oni Soesanto, 2024; 105 pages)

Dengue fever is an infectious disease transmitted by the *Aedes Aegypti* mosquito as the main disease-spreading vector of the dengue virus. The disease is rapidly spreading around the world, especially in tropical and sub-tropical countries. The spread of dengue fever can be modeled using mathematical modeling in the form of ordinary differential equations. The purpose of this study is to explain the formation of the dengue fever spread model, analyze the stability of the equilibrium point of the model, use the optimal control form and make numerical simulations. The result of this research is the formation of SEIR-SEI model which is divided into two populations, namely, human population (host) and mosquito (vector). Based on the model, two equilibrium points are obtained, namely, disease-free and endemic equilibrium points. Then, the basic reproduction number (R_0) is obtained using the Next Generation Matrix method and the stability analysis of the model using the linearization method and the Routh-Hurwitz Criterion. Furthermore, the results of stability analysis at the disease-free equilibrium point are locally asymptotically stable under the condition that $R_0 < 1$, while at the endemic equilibrium point is locally asymptotically stable under the condition that $R_0 > 1$. And obtained the optimal control form in the dengue fever disease spread model is in the form of vaccination control, and spraying insecticides. The results of numerical simulations of optimal control using the Fourth Order Runge-Kutta method show that when applying two controls in the form of vaccination and spraying insecticides, the dengue fever infection rate decreases over time.

Keywords: Dengue Fever, SEIR-SEI Model, Stability Analysis, Optimal Control.

PRAKATA

Puji Syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT. atas berkat, rahmat, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Kontrol Optimal Model SEIR-SEI pada Penyebaran Penyakit Demam Berdarah". Shalawat serta salam tidak lupa tercurahkan kepada junjungan besar Nabi Muhammad SAW. beserta para keluarga, sahabat, serta pengikut beliau hingga akhir zaman. Penyusun skripsi ini bertujuan untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam rangka menyelesaikan program sarjana Strata-1 Matematika di Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat.

Proses penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, dukungan, kerja sama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Selesaiannya penulisan skripsi ini penulis persembahkan secara khusus untuk kedua orang tua yang sangat hebat dan paling berjasa dalam hidup penulis. Terimakasih atas kepercayaan yang telah diberikan atas izin merantau, serta pengorbanan, cinta dan kasih sayang, doa, motivasi, semangat dan nasihat, dan juga tanpa lelah mendukung segala keputusan dan pilihan dalam hidup penulis. Semoga Allah SWT selalu menjaga kalian dalam kebaikan dan kemudahan aamiin.

Pada kesempatan kali ini penulis juga ingin mengucapkan terimakasih yang sebesar besarnya kepada:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Labung Mangkurat Banjarbaru.
2. Koordinator Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat Banjarbaru.
3. Bapak Dr. Pardi Affandi, S.Si., M.Sc selaku pembimbing pertama yang telah membimbing dan mendampingi dari awal hingga akhir penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Oni Soesanto, S.Si., M.Si. selaku pembimbing kedua yang telah membimbing dan mendampingi dari awal hingga akhir penyusunan skripsi ini.

5. Ibu Thresye, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi selama masa perkuliahan.
6. Dosen-dosen pengajar Program Studi Matematika atas bimbingan dan motivasi dalam perkuliahan.
7. Seluruh teman dan rekan mahasiswa matematika Angkatan 2020 Program Studi Matematika, yang telah memberikan semangat maupun nasihat kepada penulis selama proses penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari masih terdapat kekurangan baik dalam penulisan maupun pembahasan materi. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran untuk dijadikan masukan demi penyempurnaan skripsi ini. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak khususnya mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lambung Mangkurat Banjarbaru.

Banjarbaru, 2 Oktober 2024



Mariatul Qibtiah

NIM.2011011220004

ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

Simbol

- $\tilde{S}_h(t)$: Jumlah individu pada subpopulasi manusia yang rentan (*Susceptible human*) pada saat t
- $\tilde{E}_h(t)$: Jumlah individu pada subpopulasi manusia yang terpapar (*Exposed human*) pada saat t
- $\tilde{I}_h(t)$: Jumlah individu pada subpopulasi manusia yang terinfeksi (*Infected human*) pada saat t
- $\tilde{R}_h(t)$: Jumlah individu pada subpopulasi manusia yang sembuh (*Recovered human*) pada saat t
- $\tilde{S}_v(t)$: Jumlah individu pada subpopulasi nyamuk yang rentan (*Susceptible vektor*) pada saat t
- $\tilde{E}_v(t)$: Jumlah individu pada subpopulasi nyamuk yang terpapar (*Exposed vektor*) pada saat t
- $\tilde{I}_v(t)$: Jumlah individu pada subpopulasi nyamuk yang terinfeksi (*Infected vektor*) pada saat t
- $S_h(t)$: Proporsi individu pada subpopulasi manusia yang rentan (*Susceptible human*) pada saat t
- $E_h(t)$: Proporsi individu pada subpopulasi manusia yang terpapar (*Exposed human*) pada saat t
- $I_h(t)$: Proporsi individu pada subpopulasi manusia yang terinfeksi (*Infected human*) pada saat t
- $E_v(t)$: Proporsi individu pada subpopulasi nyamuk yang terpapar (*Exposed vektor*) pada saat t
- $I_v(t)$: Proporsi individu pada subpopulasi nyamuk yang terinfeksi (*Infected vektor*) pada saat t
- $\tilde{N}_h(t)$: Jumlah total populasi manusia pada saat t
- $\tilde{N}_v(t)$: Jumlah total populasi nyamuk pada saat t
- λ_h : Laju kelahiran dari populasi manusia
- μ_h : Laju kematian alami dari populasi manusia

- b : Laju gigitan populasi nyamuk
- μ_v : Laju kematian alami dari populasi nyamuk
- γ_h : Laju kesembuhan populasi manusia
- β_h : Laju penyebaran penyakit dari populasi nyamuk ke populasi manusia
- β_v : Laju penyebaran penyakit dari populasi manusia ke populasi nyamuk
- ϵ_h : Laju inkubasi intrinsik
- ϵ_v : Laju inkubasi ekstrinsik
- A : Laju pertambahan populasi nyamuk yang konstan
- E_0 : Titik kesetimbangan bebas penyakit
- E_1 : Titik kesetimbangan endemik
- R_0 : Bilangan Reproduksi Dasar
- J : Matriks Jacobian
- G : Matriks *Next Generation*
- λ : Nilai eigen persamaan karakteristik
- H : Matriks Routh-Hurwitz
- \mathcal{L} : Fungsi Lagrange
- \mathcal{H} : Fungsi Hamiltonian
- u_1 : Kontrol vaksinasi pada individu yang rentan
- u_2 : Kontrol Pemberian Insektisida
- J : Fungsi Tujuan (*Performance index*)
- t_f : Waktu akhir mewakili lamanya pengobatan
- u_1^* : Kontrol vaksinasi pada individu rentan yang optimal
- u_2^* : Kontrol penggunaan insektisida yang optimal
- B_0 : Koefisien bobot dari individu terinfeksi
- B_1 : Koefisien bobot biaya yang dikenakan pada kontrol vaksinasi
- B_2 : Koefisien bobot biaya yang dikenakan pada kontrol penggunaan insektisida

DAFTAR ISI

PERNYATAAN	iii
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
PRAKATA	vi
ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Tujuan Penelitian.....	3
1.3 Sistematika Penulisan.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Persamaan Diferensial	5
2.2 Sistem Persamaan Diferensial	6
2.2.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier	6
2.2.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier.....	8
2.3 Titik Keseimbangan	8
2.4 Deret Taylor n Peubah.....	9
2.5 Analisis Kestabilan	9
2.4.1 Linierisasi	10
2.4.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	11
2.4.3 Bilangan Reproduksi Dasar.....	14
2.4.4 Kriteria Routh-Hurwitz	16
2.6 Kontrol Optimal	17
2.6.1 Metode Lagrange.....	18
2.6.2 Fungsi Hamiltonian	18
2.6.3 Prinsip Maksimum Pontryagin.....	19
2.7 Metode Runge-Kutta	20
2.8 Demam Berdarah.....	21

2.8.1	Vaksinasi	22
2.8.2	Penyemprotan Insektisida	22
BAB III METODE PENELITIAN		23
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN		25
4.1	Pembentukan Model Penyakit Demam Berdarah.....	25
4.2	Analisis Kestabilan Model Penyakit Demam Berdarah	38
4.2.1	Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	39
4.2.2	Bilangan Reproduksi Dasar.....	43
4.2.3	Titik Keseimbangan Endemik.....	51
4.2.4	Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan	54
4.3	Menentukan Bentuk Kontrol Optimal dari Model Penyakit Demam Berdarah	74
4.4	Simulasi Numerik.....	80
4.4.1	Simulasi Numerik Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	81
4.4.2	Simulasi Numerik Titik Keseimbangan Endemik.....	85
4.4.3	Simulasi Numerik dengan Kontrol Optimal.....	92
BAB V PENUTUP.....		101
5.1	Kesimpulan.....	101
5.2	Saran	102
DAFTAR PUSTAKA		103